
Fluid Mechanics

basics

10 mar 2026

Incompressible Fluid Mechanics

This material is part of the [basics-books project](#). It is also available as a .pdf document.

Feel free to check out the Github repo of the project, [basics-book project](#), leave a comment, suggestion or start contributing.

- Incompressible Fluid Mechanics
 - *Statics*
 - *Surface Tension*
 - *Kinematics*
 - *Balance equations*
 - *Bernoulli theorems and vorticity dynamics*
 - *Exact solutions of Navier-Stokes equations*
 - *Similitude*
 - *Incompressible Aerodynamics*
 - *Boundary layer*
 - *Instability and turbulence*
- Compressible Fluid Mechanics
 - *Introduction to Compressible Fluid Mechanics*
 - *Governing equations*
 - *Thermodynamics*
 - *Jump conditions*
 - *Bernoulli's theorem in compressible fluid mechanics*
 - *Vorticity equation*
 - *Entropy equation*
 - *Potential equation for irrotational compressible flows*
 - *Canonical flows*
 - *Riemann problem*
 - *Characteristics*
 - *Steady 2-dimensional flows*
 - *Acoustics*

Parte I

Incompressible Fluid Mechanics

1.1 Definizione di fluido

Un fluido è un materiale che non è in grado di sopportare sforzi di taglio, quando è in quiete o in moto con velocità uniforme in un sistema di riferimento inerziale (invarianza galileiana). I fluidi «ordinari» sono isotropi, cioè sono indipendenti dall'orientazione nello spazio. Un fluido isotropo in quiete è quindi caratterizzato da uno stato di sforzo idrostatico,

$$\mathbb{T}^{(s)} = -p\mathbb{I} ,$$

avendo indicato con $\mathbb{T}^{(s)}$ il tensore degli sforzi in quiete, p la pressione all'interno del fluido e \mathbb{I} il tensore identità. Il vettore sforzo \mathbf{t}_n agente su una superficie di fluido con normale $\hat{\mathbf{n}}$ si ottiene tramite il **teorema di Cauchy** per i mezzi continui

$$\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T} ,$$

che lega il vettore sforzo al tensore degli sforzi tramite il versore normale alla superficie considerata, e che nel caso di fluido in quiete, diventa

$$\mathbf{t}_n^{(s)} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T}^{(s)} = -p\hat{\mathbf{n}} .$$

Per il principio di azione e reazione, lo sforzo agente su un materiale a contatto con un fluido è di intensità uguale e direzione opposta. La risultante \mathbf{R} delle forze agenti su un volume di fluido V è data dalla somma dell'integrale su V delle forze di volume \mathbf{f} e dell'integrale sulla superficie S , contorno del volume V , del vettore sforzo \mathbf{t}_n ,

$$\mathbf{R} = \int_V \mathbf{f} + \oint_S \mathbf{t}_n .$$

1.2 Equazione di equilibrio: forma integrale e differenziale

Un sistema meccanico è in equilibrio quando la risultante delle forze esterne e la risultante dei momenti esterni agenti sul fluido sono nulle,

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{R}^{ext} \\ \mathbf{0} = \mathbf{M}^{ext} . \end{cases}$$

Per un mezzo continuo non polare, è possibile dimostrare che l'equilibrio ai momenti si riduce alla condizione di simmetria del tensore degli sforzi. L'equilibrio delle forze agenti su un volume di fluido V in quiete, delimitato dalla superficie $\partial V = S$, soggetto a forze per unità di volume \mathbf{f} in V e forze per unità di superficie $\mathbf{t}_n = -p\hat{\mathbf{n}}$ su S diventa

$$\mathbf{0} = \mathbf{R}^{ext} = \int_V \mathbf{f} + \oint_S \mathbf{t}_n = \int_V \mathbf{f} - \oint_S p\hat{\mathbf{n}} .$$

La condizione appena ottenuta è una **condizione di equilibrio integrale**, per l'intero volume fluido V . Se il campo di pressione p è sufficientemente regolare, è possibile applicare il teorema del gradiente ([thm:grad]{reference-type=»ref» reference=»thm:grad»}) all'integrale di superficie e raccogliere i termini a destra dell'uguale sotto un unico integrale di volume V ,

$$\mathbf{0} = \int_V (\mathbf{f} - \nabla p) .$$

Poiché la condizione di equilibrio deve essere valida indipendentemente dal volume V considerato, imponendo che l'integranda sia identicamente nulla, si ottiene l'**equazione di equilibrio in forma differenziale**

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) - \nabla p(\mathbf{r}) = \mathbf{0} ,$$

dove è stata esplicitata la dipendenza dei campi \mathbf{f} , p dall'ordinata spaziale \mathbf{r} . Nel caso in cui sia noto il campo di forze di volume \mathbf{f} all'interno del dominio considerato, l'equazione differenziale alle derivate parziali ([eqn:statica:diff]{reference-type=»ref» reference=»eqn:statica:diff»}), con le opportune condizioni al contorno, permette di calcolare il campo di pressione $p(\mathbf{r})$.

1.3 Legge di Stevino

La legge di Stevino descrive il campo di pressione come funzione della quota, nelle vicinanze della superficie terrestre. La legge di Stevino viene ricavata dall'integrazione dell'equilibrio in forma differenziale ([eqn:statica:diff]{reference-type=»ref» reference=»eqn:statica:diff»}), nel caso in cui le forze di volume siano dovute alla gravità $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{g}(\mathbf{r})$, avendo indicato con $\rho(\mathbf{r})$ la densità del fluido e con \mathbf{g} il campo di accelerazione gravitazionale,

$$-\nabla p(\mathbf{r}) + \rho(\mathbf{r})\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} .$$

Nell'ipotesi di essere sufficientemente vicino alla terra da poter considerare il campo vettoriale \mathbf{g} uniforme e diretto verso il basso lungo la normale alla superficie terrestre, è possibile scrivere l'equazione precedente in un sistema di coordinate cartesiane. Orientando l'asse z verso l'alto lungo la normale alla superficie, le tre componenti cartesiane dell'equazione vettoriale sono

$$\begin{cases} \partial p(x, y, z)/\partial x = 0 \\ \partial p(x, y, z)/\partial y = 0 \\ \partial p(x, y, z)/\partial z = -\rho(x, y, z)g . \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ricava che il campo di pressione non può dipendere dalle coordinate x , y ed è quindi solo funzione di z . Poiché il campo di pressione dipende solo da z , $p = P(z)$, la terza equazione diventa un'equazione differenziale ordinaria,

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(x, y, z)g ,$$

alla quale deve essere aggiunta una condizione al contorno del tipo $P(z_0) = p_0$.¹ Senza ulteriori ipotesi, il problema composto dall'equazione ([eqn:statica:Pz]{reference-type=>ref> reference=>eqn:statica:Pz>}) e dalla condizione al contorno necessaria ha come incognite il campo di pressione P e il campo di densità ρ . In generale, per risolvere il problema è necessario la legge di stato del fluido che mette in relazione i due campi. Nell'ipotesi che la densità ρ e la forza di gravità siano costanti, la soluzione del problema ([eqn:statica:Pz]{reference-type=>ref> reference=>eqn:statica:Pz>}) coincide con la *legge di Stevino*,

$$p(z) + \rho g z = p_0 = \text{cost} ,$$

avendo orientato l'asse z verso l'alto e imposto la condizione al contorno in $z_0 = 0$.

Exercise 1.3.1

Utilizzando la legge di stato dei gas perfetti per l'aria, $P = \rho RT$, e l'approssimazione lineare dell'andamento della temperatura con la quota z , con gradiente termico $dT/dz = a = -6.5^\circ/km$, si ricavi l'andamento con la quota z delle variabili termodinamiche (P, ρ, T) per l'atmosfera standard. Si trascuri l'andamento di g con la quota. Trascurando la curvatura terrestre, si utilizzi un sistema di coordinate cartesiane per scrivere le componenti dell'equazione vettoriale ([eqn:statica:diff:g]{reference-type=>ref> reference=>eqn:statica:diff:g>}).

Exercise 1.3.2

[[exe:stdatm:sphe]]{#exe:stdatm:sphe label=>exe:stdatm:sphe>} Utilizzando la legge di stato dei gas perfetti per l'aria, $P = \rho RT$, e l'approssimazione lineare dell'andamento della temperatura con la quota r , con gradiente termico $dT/dr = a = -6.5^\circ/km$, si ricavi l'andamento con la quota r delle variabili termodinamiche (P, ρ, T) per l'atmosfera standard, senza trascurare l'effetto della curvatura terrestre. Si utilizzi un sistema di coordinate sferiche per scrivere le componenti dell'equazione vettoriale ([eqn:statica:diff:g]{reference-type=>ref> reference=>eqn:statica:diff:g>}). Si valuti poi l'errore che si commette nell'esercizio [exe:stdatm:cart]{reference-type=>ref> reference=>exe:stdatm:cart>} trascurando la curvatura terrestre sul calcolo delle variabili termodinamiche a quota $z = 10 km$.

1.4 Galleggiamento di un corpo immerso in un fluido

Un corpo immerso in fluido riceve dal basso verso l'alto una spinta uguale al peso della massa del fluido spostato. Se un corpo di volume V_s immerso in un fluido ρ_f ne sposta un volume \tilde{V}_f , su di esso agisce una forza (di Archimede o di galleggiamento)

$$\mathbf{F}_{Arch} = -\rho_f \tilde{V}_f \mathbf{g} = - \int_{\tilde{V}_f} \rho_f \mathbf{g} .$$

La legge di Archimede vale per un sistema immerso nel campo di gravità \mathbf{g} , uniforme in spazio. Forze di galleggiamento nascono su un corpo immerso in un fluido in cui c'è un gradiente di pressione. La legge di Archimede è solo un caso particolare di galleggiamento, forse il più evidente, per il quale il campo di gravità è all'origine del gradiente di pressione. In generale, la forza di galleggiamento su un corpo immerso completamente in un fluido vale

$$\mathbf{F}_{gall} = - \int_{S_s} p \hat{\mathbf{n}} = - \int_{V_s} \nabla p .$$

Un esempio di galleggiamento di interesse aeronautico si incontra quando si svolge un esperimento in galleria del vento, se nella camera di prova è presente un gradiente di pressione diretto nella direzione $\hat{\mathbf{x}}$ della corrente. Se in prima approssimazione si considera un gradiente di pressione $\nabla p = -G_P \hat{\mathbf{x}}$, $G_P > 0$ e costante, si può stimare la forza di

¹ In generale, servono delle condizioni di compabilità dei dati affinché il problema sia risolvibile. Ad esempio, non dovrebbe essere difficile convincersi che il campo di densità deve dipendere solo dalla coordinata z nel caso considerato.

galleggiamento $\mathbf{F}_{gall} = V_s G_P \hat{\mathbf{x}}$ dovuta al gradiente di pressione in galleria del vento, assente in condizioni di aria libera. Questa azione contribuisce al valore misurato della resistenza del modello. La valutazione di questa azione «spuria» sul corpo e la correzione delle misure effettuate rientrano nell'ambito delle *correzioni di galleria*.

Si ritorna ora sulla legge di Archimede che descrive le forza di galleggiamento che un fluido esercita su un corpo immerso. Nel problema di un corpo immerso in un fluido, la risultante delle forze di galleggiamento entra nell'equazione di equilibrio del corpo in direzione verticale (direzione della gravità, \mathbf{g}). Il punto di applicazione della risultante delle forze di galleggiamento e la sua posizione relativa rispetto al baricentro del corpo influenzano la stabilità delle condizioni di equilibrio.

1.5 Risultante delle forze: legge di Archimede

Si considera il problema di un corpo immerso in un fluido di densità uniforme ρ molto maggiore della densità dell'aria: la pressione agente sulla superficie del corpo esposta all'aria si può considerare costante, uguale a p_a . La legge di Stevino descrive la distribuzione di pressione all'interno del fluido. Si sceglie l'asse z in direzione verticale, così che il campo di gravità è $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$. Scegliendo l'origine dell'asse z in corrispondenza del pelo libero, la pressione all'interno del fluido vale $p(z) = p_a - \rho gz$, per $z < 0$. Facendo riferimento alla figura [fig:archimede_01]{reference-type=>ref} reference=>fig:archimede_01}, si può calcolare la risultante delle forze \mathbf{R} come

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= - \oint_S p \hat{\mathbf{n}} = - \int_{S_a} p \hat{\mathbf{n}} - \int_{S_f} p \hat{\mathbf{n}} = \\ &= - \int_{S_a} p_a \hat{\mathbf{n}} - \int_{S_f} p_a \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_f} \rho gz \hat{\mathbf{n}} = \\ &= - \underbrace{\int_S p_a \hat{\mathbf{n}}}_{=0} + \int_{S_f} \rho gz \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \int_{S_f} \rho gz \hat{\mathbf{n}} + \underbrace{\int_{S_0} \rho gz \hat{\mathbf{n}}}_{=0, z|_{S_0}=0} = \oint_{\tilde{S}_f} \rho gz \hat{\mathbf{n}} = \int_{\tilde{V}_f} \rho g \hat{\mathbf{z}} = \rho \tilde{V}_f g \hat{\mathbf{z}} = M_{\tilde{V}_f} g, \end{aligned}$$

avendo sommato l'integrale nullo $\int_{S_0} \rho gz \hat{\mathbf{n}}$, per poter ottenere l'integrale di ρgz sulla superficie $\tilde{S}_f = S_f \cup S_0$ e applicare il teorema del gradiente ([thm:grad]{reference-type=>ref} reference=>thm:grad}). Come stabilito dal principio di Archimede, la risultante delle forze di galleggiamento \mathbf{R} agenti sul corpo agisce dal basso verso l'alto con un'intensità pari al peso del volume di fluido spostato, $M_{\tilde{V}_f} g$.

1.6 Punto di applicazione

Il punto di applicazione della forza di galleggiamento è il punto dove bisogna applicare la risultante delle forze per ottenere un sistema di azioni equivalente al sistema di azioni continuo generato dalla pressione. Dall'equivalenza ai momenti dei due sistemi di azioni, si ottiene

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_O \times \mathbf{R} &= - \oint_S p \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} = - \int_{S_a} p \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} - \int_{S_f} p \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} = \\
 &= - \int_{S_a} p_a \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} - \int_{S_f} p_a \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_f} \rho g z \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} = \\
 &= - \underbrace{\int_S p_a \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}}_{=0} + \int_{S_f} \rho g z \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} = \\
 &= \int_{S_f} \rho g z \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} + \underbrace{\int_{S_0} \rho g z \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}}_{=0, z|_{S_0}=0} = \\
 &= \oint_{\tilde{S}_f} \rho g z \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} = \oint_{\tilde{S}_f} \rho g \delta_{\ell z} r_\ell \epsilon_{ijk} r_j n_k = \rho g \int_{\tilde{V}_f} \frac{\partial}{\partial r_k} (\delta_{\ell z} r_\ell \epsilon_{ijk} r_j) = \\
 &= \rho g \int_{\tilde{V}_f} \delta_{\ell z} \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial r_\ell}{\partial r_k} r_j + r_\ell \frac{\partial r_j}{\partial r_k} \right) = \\
 &= \rho g \int_{\tilde{V}_f} \delta_{\ell z} \epsilon_{ijk} (\delta_{\ell k} r_j + r_\ell \delta_{jk}) = \\
 &= \rho g \int_{\tilde{V}_f} \epsilon_{ijz} r_j + \underbrace{\delta_{\ell z} \epsilon_{ijj} r_\ell}_{=0} = \\
 &= \rho g \int_{\tilde{V}_f} \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{z}}.
 \end{aligned}$$

Usando un sistema di assi cartesiani e ricordando che $\mathbf{R} = R\hat{\mathbf{z}}$, si può scomporre l'equazione nelle componenti non nulle, x e y ,

$$\begin{cases} x_0 R = \rho g \int_{\tilde{V}_f} x \\ y_0 R = \rho g \int_{\tilde{V}_f} y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{\rho g}{R} \int_{\tilde{V}_f} x = \frac{1}{\tilde{V}_f} \int_{\tilde{V}_f} x \\ y_0 = \frac{\rho g}{R} \int_{\tilde{V}_f} y = \frac{1}{\tilde{V}_f} \int_{\tilde{V}_f} y. \end{cases}$$

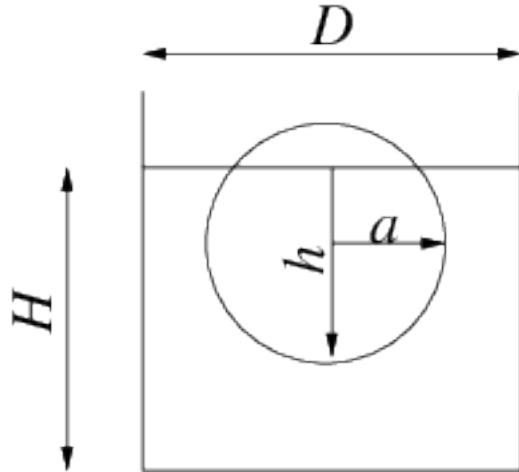
1.7 Stabilità statica dell'equilibrio

todo Ritrovare simulazione, della dipendenza della stabilità dalla posizione del centro di massa; fare riferimento a veliero Vasa

1.8 Exercises

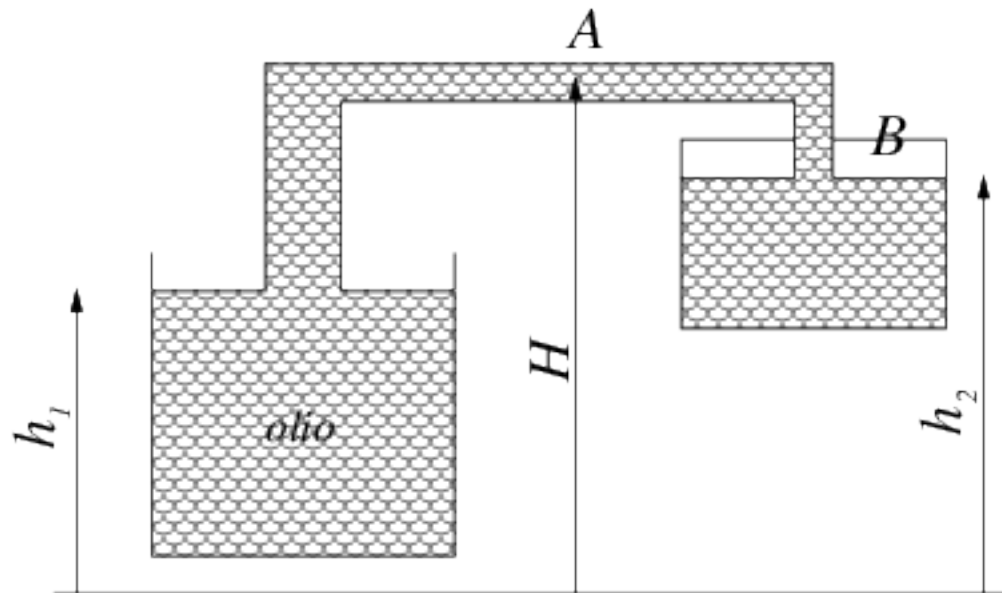
Exercise 1.1 Si consideri, sulla superficie terrestre, un recipiente di diametro $D = 2\text{ m}$ e profondità $H = 3\text{ m}$ contenente acqua di densità $\rho = 998\text{ kg/m}^3$. Al suo interno è inserita una sfera di raggio $a = 0.2\text{ m}$ e densità pari a $\rho_s = 842.06\text{ kg/m}^3$. Determinare in modo univoco la posizione assunta dalla sfera nel liquido. Tale posizione varia se invece che sulla terra ci si trova sulla Luna?

($h = 0.3\text{ m}$, non varia sulla Luna.)



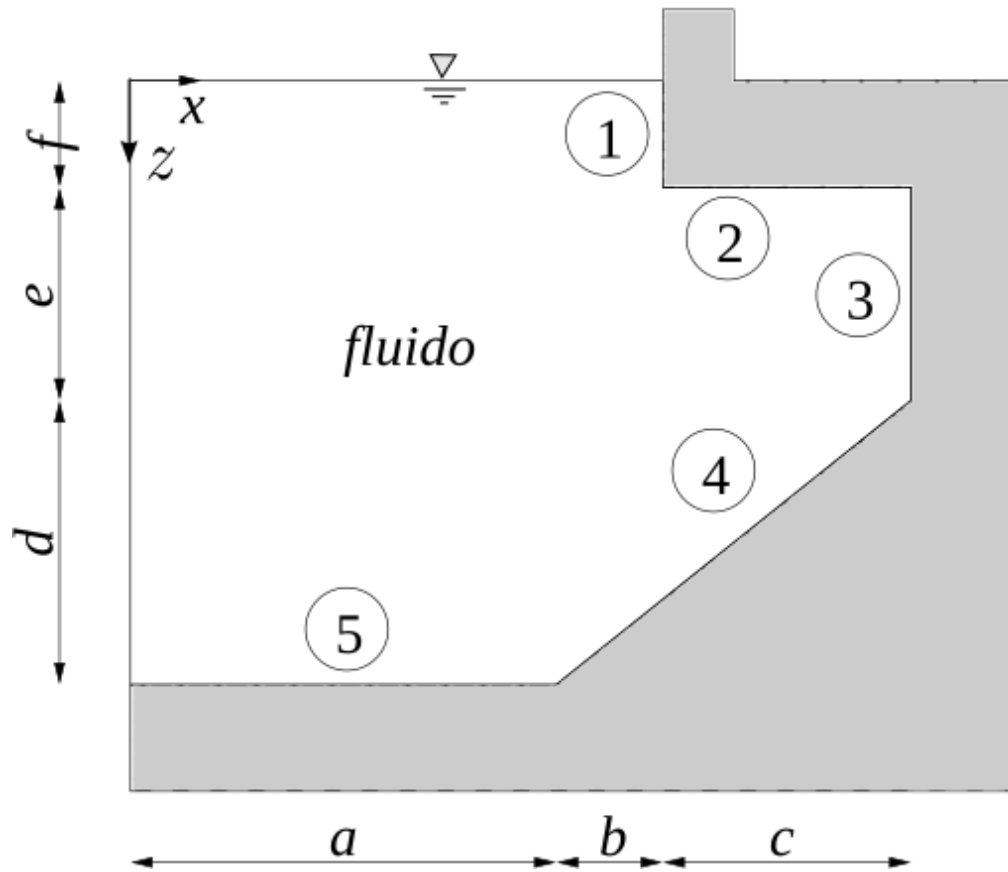
Exercise 1.2 Si consideri il sistema rappresentato in figura in cui un recipiente aperto all'atmosfera, contenente olio con densità $\rho = 800\text{ kg/m}^3$, è collegato tramite una tubazione a un secondo recipiente, contenente a sua volta olio e aria non miscelati. Date le due altezze $h_1 = 1.5\text{ m}$ e $h_2 = 1.8\text{ m}$ del pelo libero nei due recipienti e l'altezza $H = 2.5\text{ m}$ della tubatura, determinare il valore della pressione nei punti A e B in figura, esprimendolo sia in Pascal sia in metri d'acqua. Considerare la pressione atmosferica standard (101325 Pa).

($p_A = 93477\text{ Pa} = 9.53\text{ m}_{H_2O}$, $p_B = 98970.6\text{ Pa} = 10.10\text{ m}_{H_2O}$.)



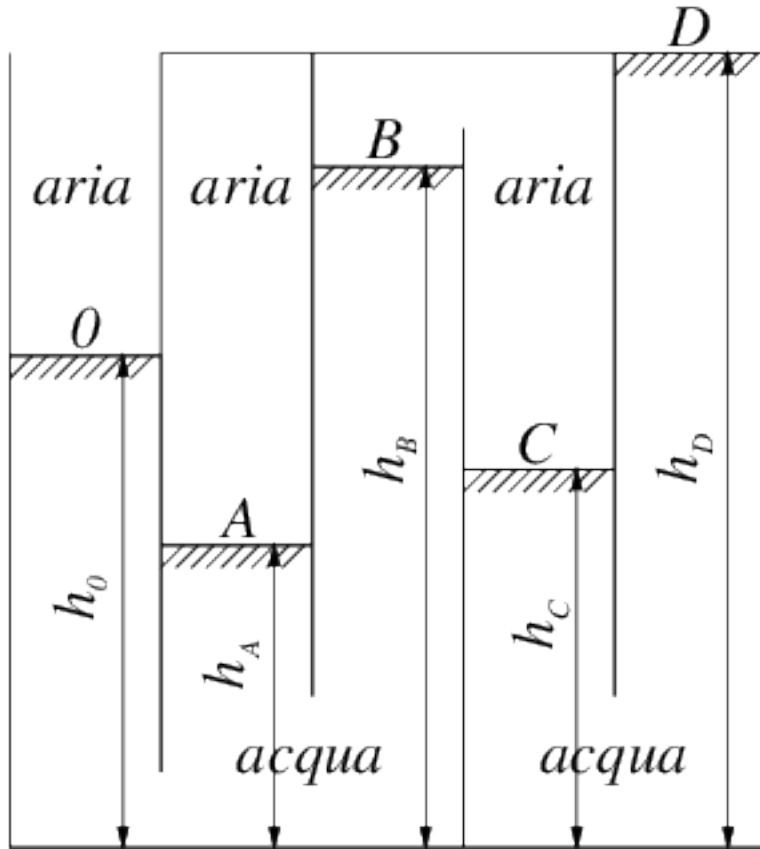
Exercise 1.3 Si consideri la sezione di diga rappresentata in figura. Si determini il modulo e la direzione del risultante delle forze per unità di apertura agente sui diversi tratti rettilinei della diga stessa sapendo che la pressione atmosferica è di $1.01 \times 10^5\text{ Pa}$. Dimensioni: $a = 10\text{ m}$, $b = 2\text{ m}$, $c = 8\text{ m}$, $d = 10\text{ m}$, $e = 5\text{ m}$, $f = 3\text{ m}$.

($\mathbf{R}_1 = 347100\hat{x} \text{ N/m}$, $\mathbf{R}_2 = -1043200\hat{z} \text{ N/m}$, $\mathbf{R}_3 = 774500\hat{x} \text{ N/m}$, $\mathbf{R}_4 = 2284000\text{N/m}\hat{x} + 2284000\text{N/m}\hat{z}$, $\mathbf{R}_5 = 2774000\hat{z} \text{ N/m}$.)



Exercise 1.4 Si consideri il sistema di recipienti rappresentato in figura, in cui la zona tratteggiata contiene acqua, di densità pari a 10^3 kg/m^3 mentre nella restante parte é presente aria di densità pari a 1.2 kg/m^3 . Determinare la pressione nei punti A, B, C e D sapendo che le rispettive altezze sono $h_A = 1 \text{ m}$, $h_B = 1.4 \text{ m}$, $h_C = 1.2 \text{ m}$ e $h_D = 1.6 \text{ m}$. Sia inoltre $h_0 = 1.3 \text{ m}$ e la pressione esterna $P_0 = 101325 \text{ Pa}$.

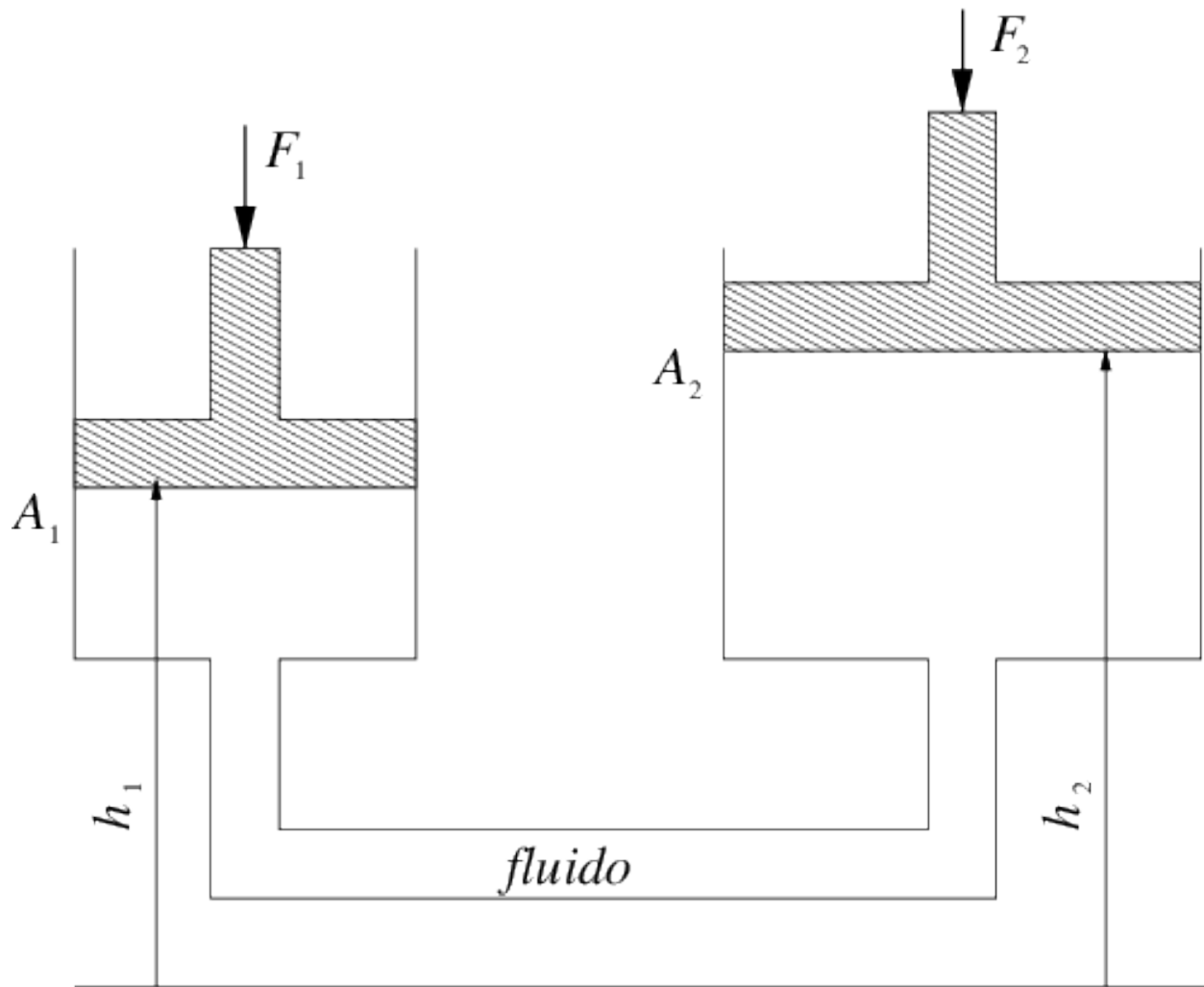
($P_A = 104262 \text{ Pa}$, $P_B = 100346 \text{ Pa}$, $P_C = 100348 \text{ Pa}$, $P_D = 97424 \text{ Pa}$.)



Exercise 1.5 La leva idraulica, rappresentata in figura, é formata da due sistemi cilindro-pistone. Determinare la forza che é necessario applicare al secondo pistone per mantenere il sistema in equilibrio quando sul primo agisce una forza $F_1 = 5000 \text{ N}$, allorché i pistoni si trovano nella posizione indicata in figura.

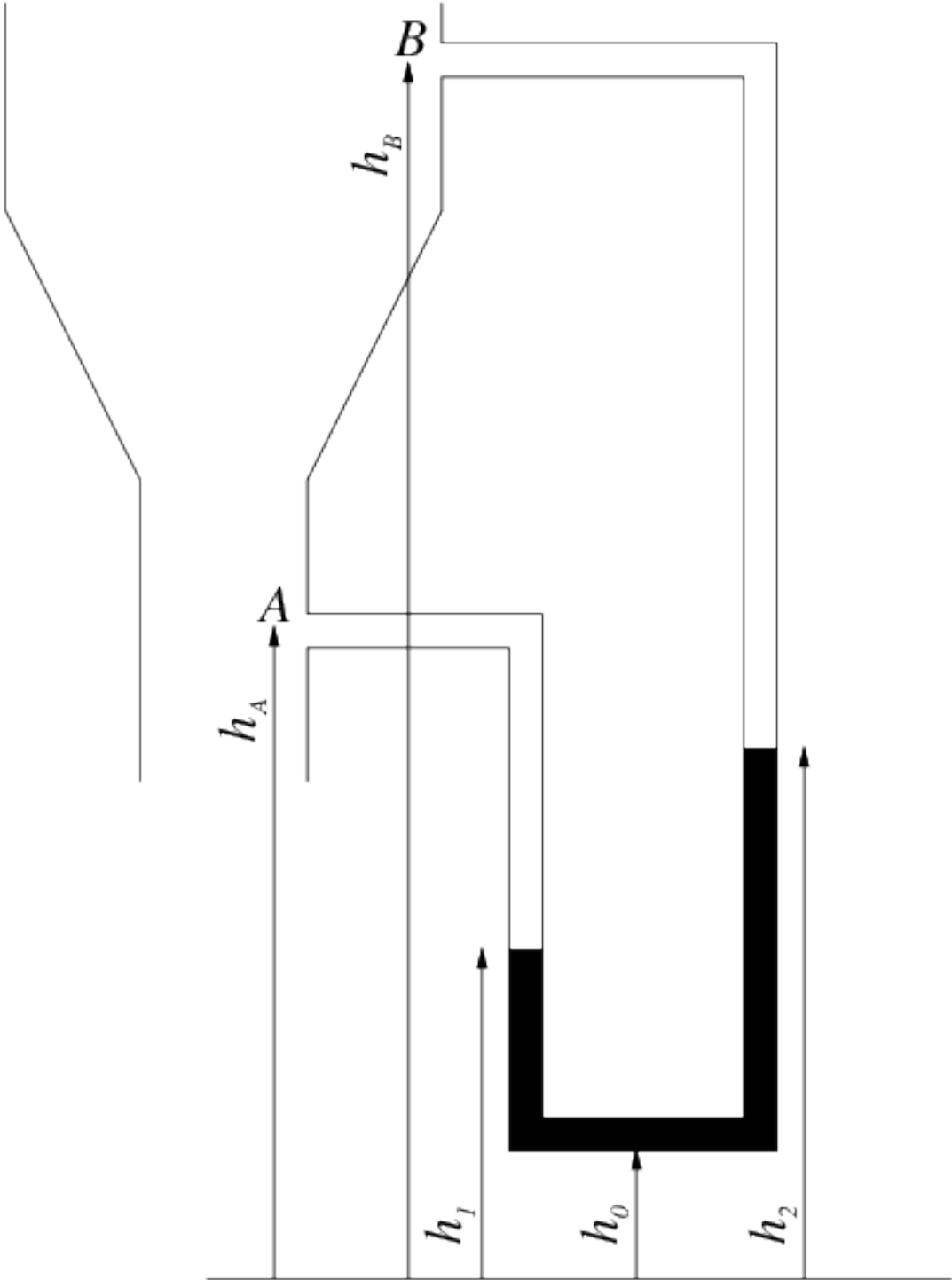
Dati: diametro primo cilindro: $d_1 = 0.2 \text{ m}$; diametro secondo cilindro: $d_2 = 0.4 \text{ m}$; diametro del condotto che unisce i due cilindri: 0.025 m ; densità del fluido di lavoro: 600 kg/m^3 ; altezza del primo pistone $h_1 = 1 \text{ m}$, altezza del secondo pistone $h_2 = 2 \text{ m}$.

($p_1 = 159155 \text{ Pa}$, $p_2 = 153269 \text{ Pa}$, $\mathbf{F}_2 = -19260.3\hat{\mathbf{z}} \text{ N}$.)



Exercise 1.6 Si consideri il manometro riportato in figura utilizzato per misurare la differenza di pressione esistente fra due sezioni diverse di un condotto. Determinare la differenza di pressione fra i punti A e B riportati sul disegno sapendo che il liquido manometrico é acqua e ha una densità di 998 kg/m^3 , che il fluido che scorre all'interno del condotto é aria e ha una densità di 1.225 kg/m^3 , che $h_A = 1 \text{ m}$, che $h_B = 1.2 \text{ m}$, che $h_0 = 0.1 \text{ m}$, che $h_1 = 0.3 \text{ m}$ e che $h_2 = 0.7 \text{ m}$.

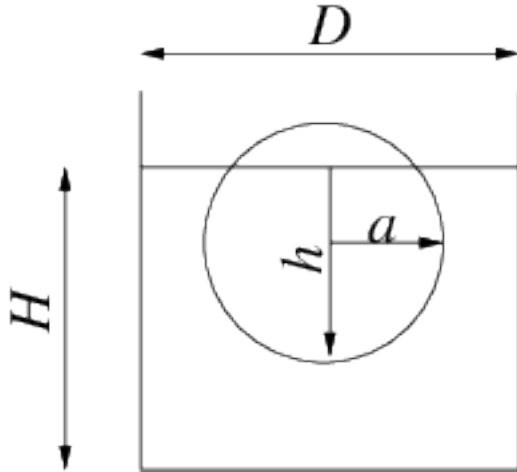
$$(p_B - p_A = -3913.75 \text{ Pa})$$



1.8.1 Exercise 1.1

Exercise 1.1 Si consideri, sulla superficie terrestre, un recipiente di diametro $D = 2\text{ m}$ e profondità $H = 3\text{ m}$ contenente acqua di densità $\rho = 998\text{ kg/m}^3$. Al suo interno è inserita una sfera di raggio $a = 0.2\text{ m}$ e densità pari a $\rho_s = 842.06\text{ kg/m}^3$. Determinare in modo univoco la posizione assunta dalla sfera nel liquido. Tale posizione varia se invece che sulla terra ci si trova sulla Luna?

($h = 0.3\text{ m}$, non varia sulla Luna.)



Concetti. Legge di Archimede. Condizione di equilibrio. Calcolo del volume di solidi (integrali di volume). Adimensionalizzazione. Soluzione di semplici equazioni non lineari per via grafica (studio di funzione) e/o numerica.

Svolgimento. Per svolgere l'esercizio bisogna calcolare la condizione di equilibrio del corpo, soggetto alla propria forza peso e alla forza che il fluido esercita su di esso (legge di Archimede). Nell'equazione di equilibrio, l'incognita h compare nella formula del volume immerso nel fluido. L'equazione di equilibrio è un'equazione non lineare in h , da risolvere per via grafica o numerica.

- Scrittura dell'equazione di equilibrio del corpo soggetto al proprio peso e alla forza esercitata su di esso dal fluido, diretta verso l'alto e pari al peso del volume del fluido spostato (legge di Archimede). $\rho_s V_s g = \rho V_c g \Rightarrow \rho_s V_s = \rho V_c$

Osservazione. Si trova subito la risposta all'ultimo quesito: poiché g non compare nell'equazione di equilibrio, la condizione di equilibrio sulla Luna è uguale a quella che si ha sulla Terra.

- Calcolo del volume della sfera e della calotta sferica:

- Volume della sfera: $V_s = \frac{4}{3}\pi a^3$
- Volume della calotta sferica: $V_c = \pi h^2(a - \frac{h}{3})$

(per credere, verificare casi limite: $h = 0$, $h = a$, $h = 2a$; alla fine dell'esercizio è riportato il calcolo, tramite un integrale di volume)

- Le formule per i volumi V_c e V_s sono inserite nell'eq. [eqn:equil_archimede]{reference-type=>ref» reference=>eqn:equil_archimede». L'equazione viene semplificata e scritta in forma adimensionale, introducendo la variabile $x = \frac{h}{a}$, per mettere in evidenza il parametro che governa il problema, cioè il rapporto di densità ρ_s/ρ . L'equazione di terzo grado in x viene risolta, considerando i limiti fisici del problema ($0 \leq x \leq 2$):

$$\rho \pi h^2 \left(a - \frac{h}{3} \right) = \rho_s \frac{4}{3} \pi a^3 \Rightarrow \frac{3}{4} x^2 \left(1 - \frac{x}{3} \right) = \frac{\rho_s}{\rho}$$

Alcuni metodi per risolvere equazioni non lineari possono essere ad esempio:

- metodi iterativi. Ad esempio metodo di Newton

x	res
1.0000	-3.437475e-01
1.4583	-2.406993e-02
1.4990	-5.841602e-04
1.5000	-4.027539e-07
1.5000	-1.924017e-13

- metodo grafico (educativo: per problemi più complicati, prima di calcolare le soluzioni con metodi numerici, è bene avere un'idea di cosa si sta cercando). Si cercano le intersezioni delle funzioni $f_1(x) = \frac{3}{4}x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right)$ e $f_2(x) = \frac{\rho_s}{\rho}$.

Osservazione. Per valori di $\frac{\rho_s}{\rho}$ compresi tra 0 e 1, esiste una e una sola soluzione fisica del problema. Per i valori di densità «estremi» $\rho_s = 0$ (la sfera non pesa niente), $\rho_s = \rho_f$ (la sfera ha la stessa densità del fluido), esistono infinite soluzioni: ad esempio, nel caso di $\rho_s = \rho_f$ la posizione di equilibrio è indipendente dalla profondità alla quale è posta la sfera. Nel grafico, la funzione $f_1(x)$ rappresenta il volume immerso della sfera (diviso il volume totale della sfera stessa) al variare della distanza h del punto più basso dal pelo libero: questa deve quindi essere rappresentata, come in figura, nulla per valori di $x < 0$ (sfera completamente fuori dall'acqua), con il ramo di cubica per $0 < x < 2$ (sfera parzialmente immersa), uguale a 1 per $x > 2$ (sfera completamente immersa). La funzione $f_1(x)$ può quindi essere definita a tratti:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{3}{4}x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right) & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Discussione dei risultati. Quando diminuisce la densità relativa del solido, la linea rossa si abbassa e la soluzione $x = \frac{h}{a}$ diminuisce (la sfera ha una porzione maggiore al di fuori dall'acqua). Esiste una e una sola soluzione che abbia senso fisico, fino a quando la densità relativa è compresa tra 0 e 1: non ha senso considerare valori negativi (la densità è una quantità positiva), mentre per valori di $\frac{\rho_s}{\rho}$ maggiori di 1 non può esistere una condizione di equilibrio statico (la sfera affonda...).

Calcolo volume cupola sferica. È comodo svolgere il calcolo in coordinate cilindriche (r, θ, z) . Il volume V_{im} della parte immersa è uguale a

$$\begin{aligned} V_{im} &= \iiint_{V_{im}} dV = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-a}^l \int_{r=0}^{\sqrt{a^2-z^2}} dV \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-a}^l \int_{r=0}^{\sqrt{a^2-z^2}} r dr dz d\theta \\ &= 2\pi \int_{z=-a}^l \frac{a^2 - z^2}{2} dz \\ &= \frac{\pi}{3} [2a^3 + 3a^2l - l^3] \end{aligned}$$

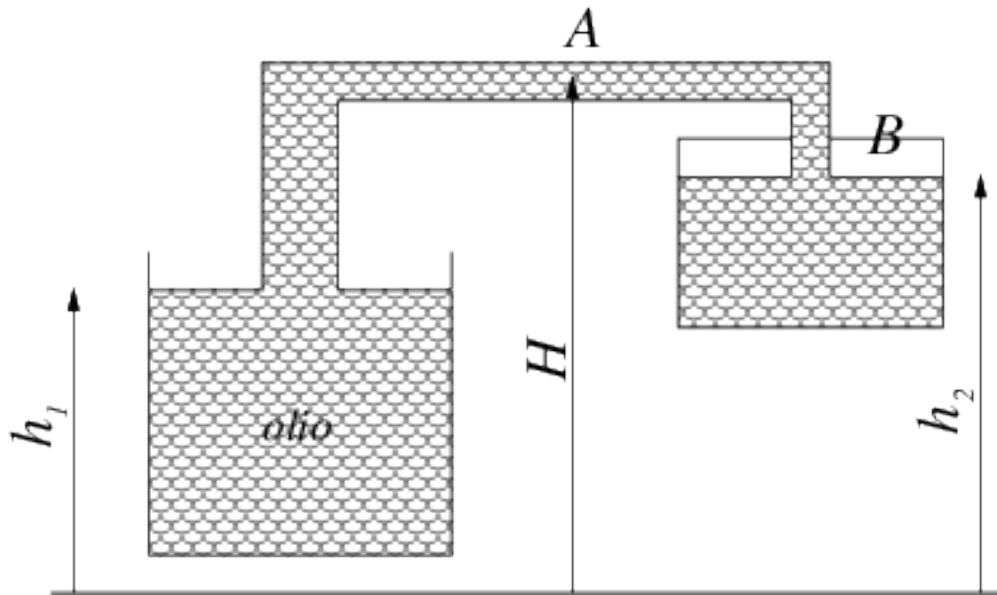
Definendo $h = R + l$ come la quota immersa della sfera, si ottiene:

$$V_{im} = \pi h^2 \left(a - \frac{h}{3}\right)$$

1.8.2 Exercise 1.2

Exercise 1.2 Si consideri il sistema rappresentato in figura in cui un recipiente aperto all'atmosfera, contenente olio con densità $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$, è collegato tramite una tubazione a un secondo recipiente, contenente a sua volta olio e aria non miscelati. Date le due altezze $h_1 = 1.5 \text{ m}$ e $h_2 = 1.8 \text{ m}$ del pelo libero nei due recipienti e l'altezza $H = 2.5 \text{ m}$ della tubatura, determinare il valore della pressione nei punti A e B in figura, esprimendolo sia in Pascal sia in metri d'acqua. Considerare la pressione atmosferica standard (101325 Pa).

($p_A = 93477 \text{ Pa} = 9.53 \text{ m}_{H_2O}$, $p_B = 98970.6 \text{ Pa} = 10.10 \text{ m}_{H_2O}$.)



Concetti. Legge di Stevino, $P_1 + \rho gh_1 = P_2 + \rho gh_2$. Conversione Pa - metri di H_2O , $1 \text{ m}_{H_2O} = P[\text{Pa}] = \rho_{H_2O} \cdot g \cdot 1 \text{ m} = 9810 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}^2} \cdot 1 \text{ m} = 9810 \text{ Pa}$.

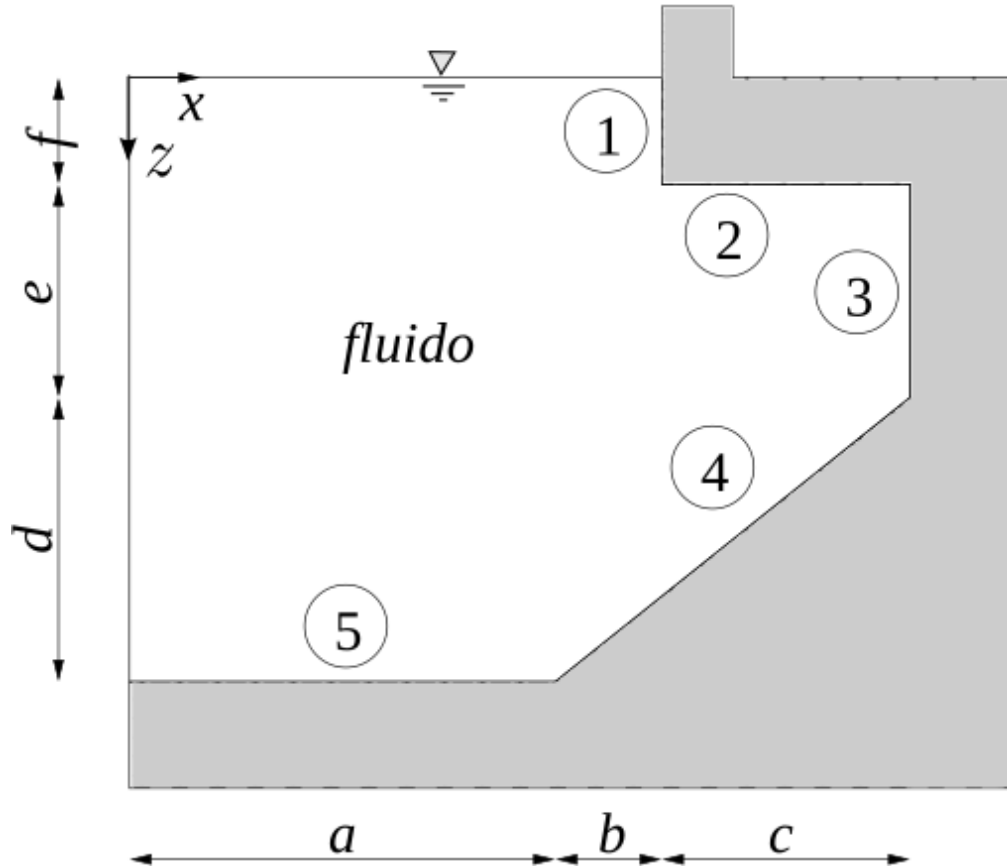
Svolgimento. Il problema si risolve applicando due volte la legge di Stevino e la conversione da Pascal Pa a metri d'acqua m_{H_2O} . Sia O il punto sul pelo libero nel serbatoio aperto di sinistra, sul quale agisce la pressione ambiente.

$$\begin{cases} P_A = P_O + \rho g(h_1 - H) = 93477 \text{ Pa} = \frac{93477}{9810} \text{ m}_{H_2O} = 9.53 \text{ m}_{H_2O} & \text{(Stevino O-A)} \\ P_B = P_O + \rho g(h_1 - h_2) = 98970.6 \text{ Pa} = \frac{98970.6}{9810} \text{ m}_{H_2O} = 10.10 \text{ m}_{H_2O} & \text{(Stevino O-B)} \end{cases}$$

1.8.3 Exercise 1.3

Exercise 1.3 Si consideri la sezione di diga rappresentata in figura. Si determini il modulo e la direzione del risultante delle forze per unità di apertura agente sui diversi tratti rettilinei della diga stessa sapendo che la pressione atmosferica è di $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$. Dimensioni: $a = 10 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $c = 8 \text{ m}$, $d = 10 \text{ m}$, $e = 5 \text{ m}$, $f = 3 \text{ m}$.

($\mathbf{R}_1 = 347100\hat{x} \text{ N/m}$, $\mathbf{R}_2 = -1043200\hat{z} \text{ N/m}$, $\mathbf{R}_3 = 774500\hat{x} \text{ N/m}$, $\mathbf{R}_4 = 2284000\text{N/m}\hat{x} + 2284000\text{N/m}\hat{z}$, $\mathbf{R}_5 = 2774000\hat{z} \text{ N/m}$.)



Concetti. Legge di Stevino, $P_1 + \rho gh_1 = P_2 + \rho gh_2$. Calcolo della risultante delle azioni statiche, data la distribuzione di pressione e la normale $\hat{\mathbf{n}}$ uscente dal volume fluido, $\mathbf{R} = \int_S P \hat{\mathbf{n}}$.

Svolgimento. Si risolve il problema bidimensionale, al quale «manca» la dimensione perpendicolare al piano del disegno. La risultante per unità di apertura agente sul lato ℓ (unità di misura nel SI, N/m) sarà quindi il risultato dell'integrale di linea

$$\mathbf{R} = \int_{\ell} P \hat{\mathbf{n}}.$$

Per ogni lato si calcola la distribuzione di pressione, grazie alla legge di Stevino. Si integra la distribuzione di pressione per ottenere il modulo della risultante; la direzione coincide con quella della normale (uscende dal volume occupato dal fluido). Per lo svolgimento, è stato scelto il sistema di riferimento rappresentato in figura, con l'asse x diretto verso destra e l'asse z verso il basso.

- Lato 1. Pressione lineare in z , $P(z) = P_O + \rho gz$, $z \in [0, f]$. Risultante

$$\mathbf{R}_1 = \int_{\ell_1} P \hat{\mathbf{n}} = \int_0^f (P_O + \rho gz) \hat{\mathbf{x}} dz = \left(P_O f + \frac{1}{2} \rho g f^2 \right) \hat{\mathbf{x}} = 347100 N/m \hat{\mathbf{x}}$$

- Lato 2. Pressione costante, $P = P_O + \rho gf$. Risultante

$$\mathbf{R}_2 = \int_{\ell_2} P \hat{\mathbf{n}} = P \cdot c(-\hat{\mathbf{z}}) = (P_O + \rho gf) \cdot c(-\hat{\mathbf{z}}) = -1043200 N/m \hat{\mathbf{z}}$$

- Lato 3. Pressione lineare in z , $P(z) = P_O + \rho gz$, $z \in [f, f + e]$. Risultante

$$\mathbf{R}_3 = \int_{\ell_3} P \hat{\mathbf{n}} = \int_f^{f+e} (P_O + \rho gz) \hat{\mathbf{x}} dz = \left(P_O e + \frac{1}{2} \rho g [(f + e)^2 - f^2] \right) \hat{\mathbf{x}} = 774500 N/m \hat{\mathbf{x}}$$

- Lato 4. Pressione lineare in z , $P(z) = P_O + \rho g z$, $z \in [f + e, f + e + d]$. Poichè il tratto di parete è rettilineo, il vettore normale è costante e può essere portato fuori dall'integrale. Si calcola prima il modulo della risultante e poi lo si moltiplica per il versore normale. Il modulo della risultante vale

$$\begin{aligned} R_4 &= \int_{\ell_4} P d\ell = \int_{f+e}^{f+e+d} P(z) \frac{\sqrt{(b+c)^2 + d^2}}{d} dz = \left(d\ell = \frac{\sqrt{(b+c)^2 + d^2}}{d} dz \right) \\ &= \int_{f+e}^{f+e+d} (P_O + \rho g z) \frac{\sqrt{(b+c)^2 + d^2}}{d} dz = \\ &= \frac{\sqrt{(b+c)^2 + d^2}}{d} \left[P_O d + \frac{1}{2} \rho g ((f+e+d)^2 - (f+e)^2) \right] = \sqrt{2} \cdot 2284000 N/m \end{aligned}$$

La forza può essere scritta come $\mathbf{R}_4 = R_4 \hat{\mathbf{n}}_4$, con $\hat{\mathbf{n}}_4 = 1/\sqrt{2} \hat{\mathbf{x}} + 1/\sqrt{2} \hat{\mathbf{z}}$. Proiettando \mathbf{R}_4 lungo gli assi si ottengono le componenti orizzontali e verticali

$$\mathbf{R}_4 = 2284000 N/m \hat{\mathbf{x}} + 2284000 N/m \hat{\mathbf{z}}$$

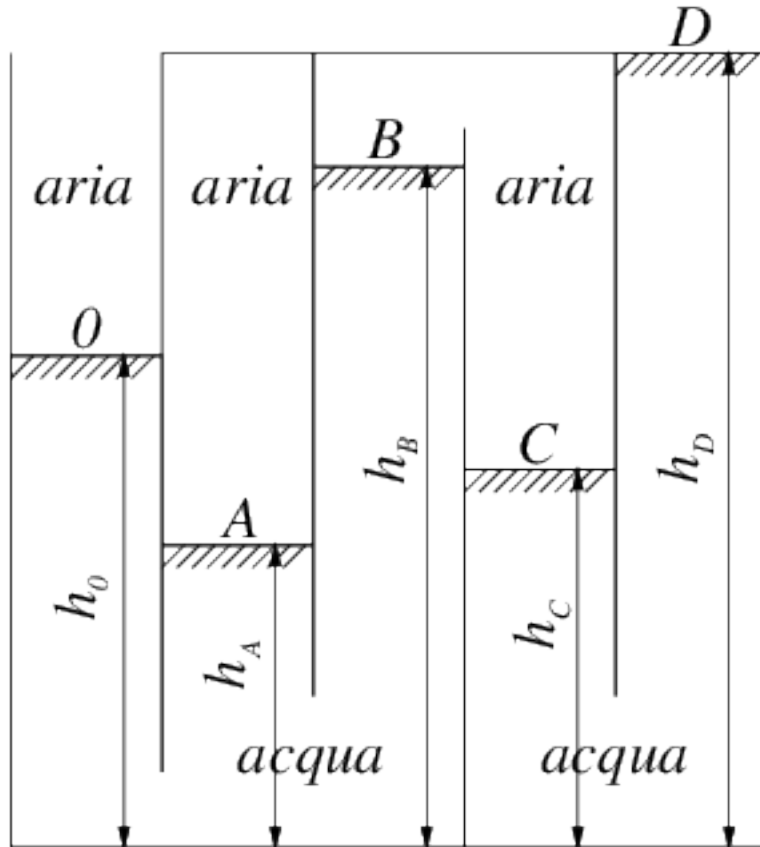
- Lato 5. Pressione costante, $P = P_O + \rho g(f + e + d)$. Risultante

$$\mathbf{R}_5 = P \cdot a \hat{\mathbf{z}} = (P_O + \rho g(f + e + d)) \cdot a \hat{\mathbf{z}} = 2774000 N/m \hat{\mathbf{z}}$$

1.8.4 Exercise 1.4

Exercise 1.4 Si consideri il sistema di recipienti rappresentato in figura, in cui la zona tratteggiata contiene acqua, di densità pari a 10^3 kg/m^3 mentre nella restante parte è presente aria di densità pari a 1.2 kg/m^3 . Determinare la pressione nei punti A, B, C e D sapendo che le rispettive altezze sono $h_A = 1 \text{ m}$, $h_B = 1.4 \text{ m}$, $h_C = 1.2 \text{ m}$ e $h_D = 1.6 \text{ m}$. Sia inoltre $h_0 = 1.3 \text{ m}$ e la pressione esterna $P_0 = 101325 \text{ Pa}$.

($P_A = 104262 \text{ Pa}$, $P_B = 100346 \text{ Pa}$, $P_C = 100348 \text{ Pa}$, $P_D = 97424 \text{ Pa}$.)



Concetti. Legge di Stevino, $P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2$.

Svolgimento. Il problema viene risolto applicando ripetutamente la legge di Stevino, a partire dalla superficie 0 sulla quale agisce la pressione ambiente P_0 . Nella legge di Stevino è necessario prestare attenzione ad usare la densità del fluido che mette in collegamento i due punti considerati. I punti A e B sono messi in collegamento con il punto 0 dall'acqua. I punti B e C sono messi in collegamento tra di loro dall'aria. I punti C e D di nuovo dall'acqua. La soluzione del problema è quindi

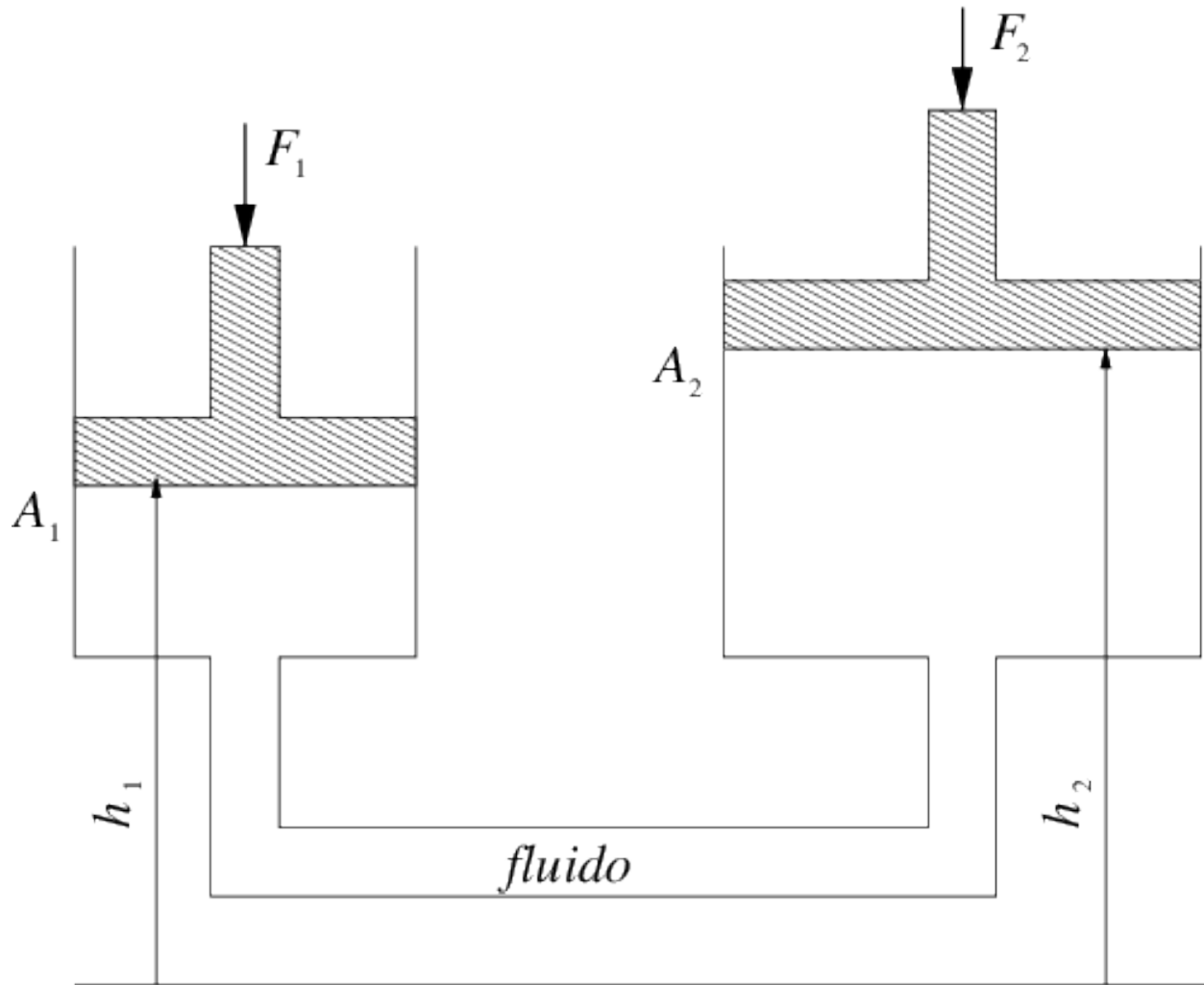
$$\begin{aligned}
 P_0 &= 101325 \text{ Pa} && \text{dato} \\
 P_A &= P_0 + \rho g (h_0 - h_A) = \dots \\
 P_B &= P_0 + \rho g (h_0 - h_B) = \dots \\
 P_C &= P_B + \rho_a g (h_B - h_C) = \dots \\
 P_D &= P_C + \rho g (h_C - h_D) = \dots
 \end{aligned}$$

1.8.5 Exercise 1.5

Exercise 1.5 La leva idraulica, rappresentata in figura, è formata da due sistemi cilindro-pistone. Determinare la forza che è necessario applicare al secondo pistone per mantenere il sistema in equilibrio quando sul primo agisce una forza $F_1 = 5000 \text{ N}$, allorché i pistoni si trovano nella posizione indicata in figura.

Dati: diametro primo cilindro: $d_1 = 0.2 \text{ m}$; diametro secondo cilindro: $d_2 = 0.4 \text{ m}$; diametro del condotto che unisce i due cilindri: 0.025 m ; densità del fluido di lavoro: 600 kg/m^3 ; altezza del primo pistone $h_1 = 1 \text{ m}$, altezza del secondo pistone $h_2 = 2 \text{ m}$.

$$(p_1 = 159155 \text{ Pa}, p_2 = 153269 \text{ Pa}, \mathbf{F}_2 = -19260.3 \hat{\mathbf{z}} \text{ N.})$$



Concetti. Legge di Stevino. Risultante statica. Leva idraulica.

Svolgimento. Il problema si risolve scrivendo le condizioni di equilibrio tra le forze esterne e la risultante dello sforzo di pressione sulle facce opposte dei pistoni e applicando la legge di Stevino tra le due sezioni A_1 e A_2 . Si ottiene un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite p_1, p_2, F_2 ,

$$\begin{cases} F_1 = p_1 \pi \frac{d_1^2}{4} & \text{(Equilibrio pistone 1)} \\ p_2 = p_1 - \rho g (h_2 - h_1) & \text{(Legge di Stevino)} \\ F_2 = p_2 \pi \frac{d_2^2}{4} & \text{(Equilibrio pistone 2),} \end{cases}$$

la cui soluzione è

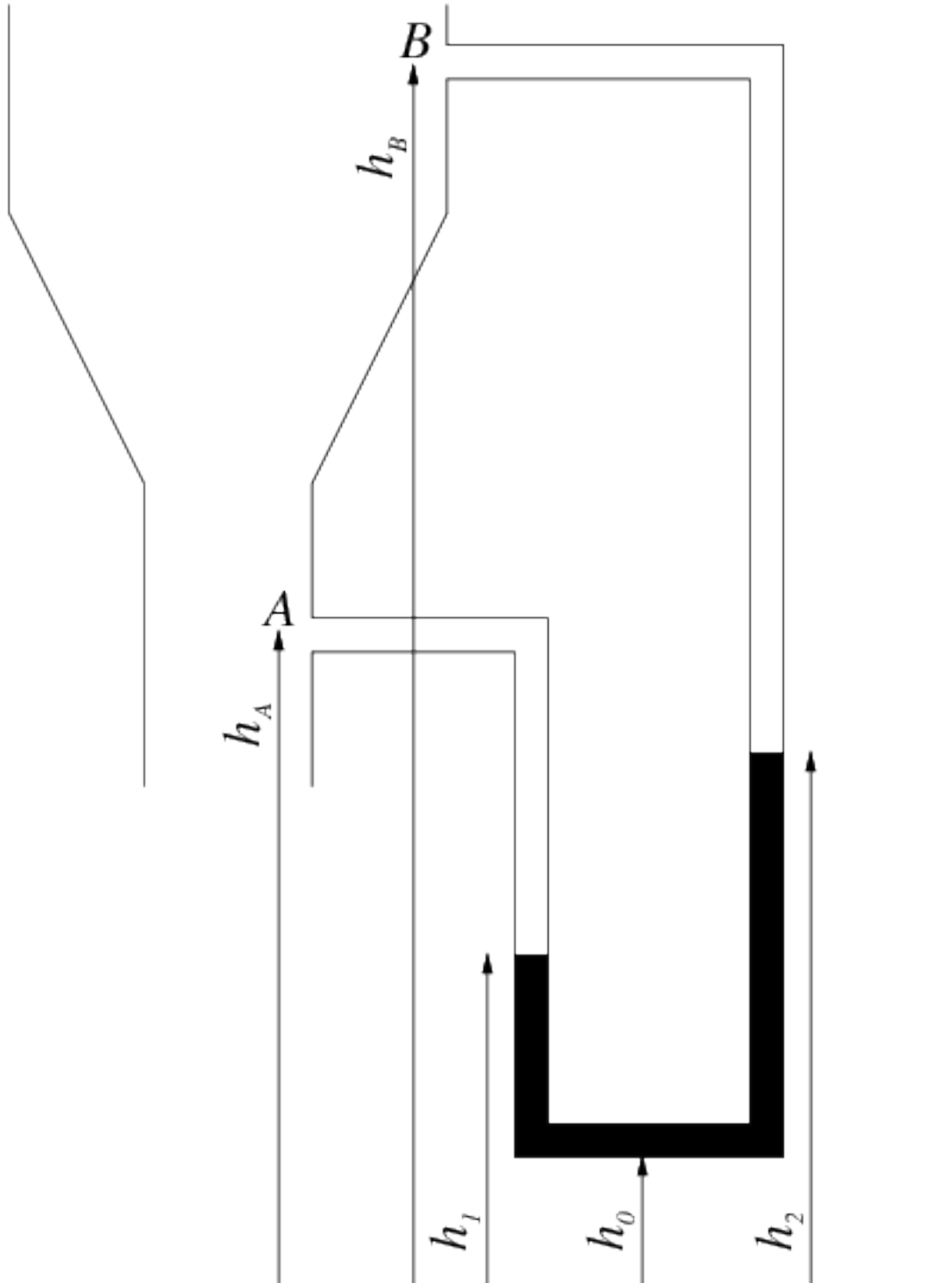
$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{4 F_1}{\pi d_1^2} & = 159155 Pa \\ p_2 = \frac{4 F_1}{\pi d_1^2} - \rho g (h_2 - h_1) & = 153269 Pa \\ F_2 = \frac{d_1^2}{d_2^2} F_1 - \frac{\pi d_2^2}{4} \rho g (h_2 - h_1) & = 19260.3 N . \end{cases}$$

La componente verticale F_2 della forza \mathbf{F}_2 è positiva diretta verso il basso, come nel disegno. Si può scrivere quindi $\mathbf{F}_2 = -F_2 \hat{\mathbf{z}}$, se il versore $\hat{\mathbf{z}}$ è orientato verso l'alto.

1.8.6 Exercise 1.6

Exercise 1.6 Si consideri il manometro riportato in figura utilizzato per misurare la differenza di pressione esistente fra due sezioni diverse di un condotto. Determinare la differenza di pressione fra i punti A e B riportati sul disegno sapendo che il liquido manometrico é acqua e ha una densità di 998 kg/m^3 , che il fluido che scorre all'interno del condotto é aria e ha una densità di 1.225 kg/m^3 , che $h_A = 1 \text{ m}$, che $h_B = 1.2 \text{ m}$, che $h_0 = 0.1 \text{ m}$, che $h_1 = 0.3 \text{ m}$ e che $h_2 = 0.7 \text{ m}$.

$(p_B - p_A = -3913.75 \text{ Pa})$



Concetti. Legge di Stevino. Manometro. Venturi.

$$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2$$

Svolgimento. Si scrive la legge di Stevino tra i punti A e 1, 1 e 2, 2 e B:

$$\begin{cases} P_B + \rho_a g z_B = P_2 + \rho_a g z_2 \\ P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2 \\ P_A + \rho_a g z_A = P_1 + \rho_a g z_1 \\ \Delta P = P_B - P_A \end{cases}$$

Si risolve il sistema lineare (come più piace). Ad esempio, partendo dalla terza e inserendo nella seconda e nella prima i risultati trovati:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_A + \rho_a g(z_A - z_1) \\ P_2 &= P_A + \rho_a g(z_A - z_1) + \rho g(z_1 - z_2) \\ P_B &= P_A + \rho_a g(z_A - z_1) + \rho g(z_1 - z_2) + \rho_a g(z_2 - z_B) \end{aligned}$$

E quindi, portando P_A a sinistra:

$$\Delta P = -(\rho - \rho_a)g(z_2 - z_1) - \rho_a g(z_B - z_A) = -3909.8 Pa$$

Osservazione.

Il sistema lineare ($\text{[eqn:stevino:underdet]}\{\text{reference-type=»ref» reference=»eqn:stevino:underdet»}\}$) è sotto determinato (se esiste una soluzione, ne esistono infinite), essendo un sistema lineare di 4 equazioni in 5 incognite, $P_1, P_2, P_A, P_B, \Delta P$. Il sistema lineare può essere scritto usando il formalismo matriciale come $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ con

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} P_A \\ P_B \\ P_1 \\ P_2 \\ \Delta P \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} \rho_a g(h_2 - h_B) \\ \rho g(h_1 - h_2) \\ \rho_a g(h_A - h_1) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Poichè la matrice \underline{A} ha rango massimo (=4), esiste una soluzione \underline{x}^* del problema, tale che $\underline{A} \underline{x}^* = \underline{b}$. Dal teorema del rango, si sa che il numero delle colonne (=5) di una matrice è uguale alla dimensione del suo rango (=4) e del suo nucleo (quindi =1). Il nucleo della matrice \underline{A} , tutti i vettori \underline{v} t.c. $\underline{A} \underline{v} = \underline{0}$, è uno spazio vettoriale di dimensione uno. Se \underline{x}^* è soluzione del sistema, allora anche tutti i vettori $\underline{x}^* + a \underline{v}$, $a \in \mathbb{R}$, sono soluzione del sistema, poichè $\underline{A}(\underline{x}^* + \underline{v}) = \underline{A} \underline{x}^* + \underline{A} \underline{v} = \underline{b} + \underline{0}$. Si può dimostrare il nucleo di \underline{A} è generato dal vettore $\underline{v} = (1, 1, 1, 1, 0)^T$. Quindi le infinite soluzioni del problema hanno la forma

$$\begin{bmatrix} P_A \\ P_B \\ P_1 \\ P_2 \\ \Delta P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_A^* \\ P_B^* \\ P_1^* \\ P_2^* \\ \Delta P^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

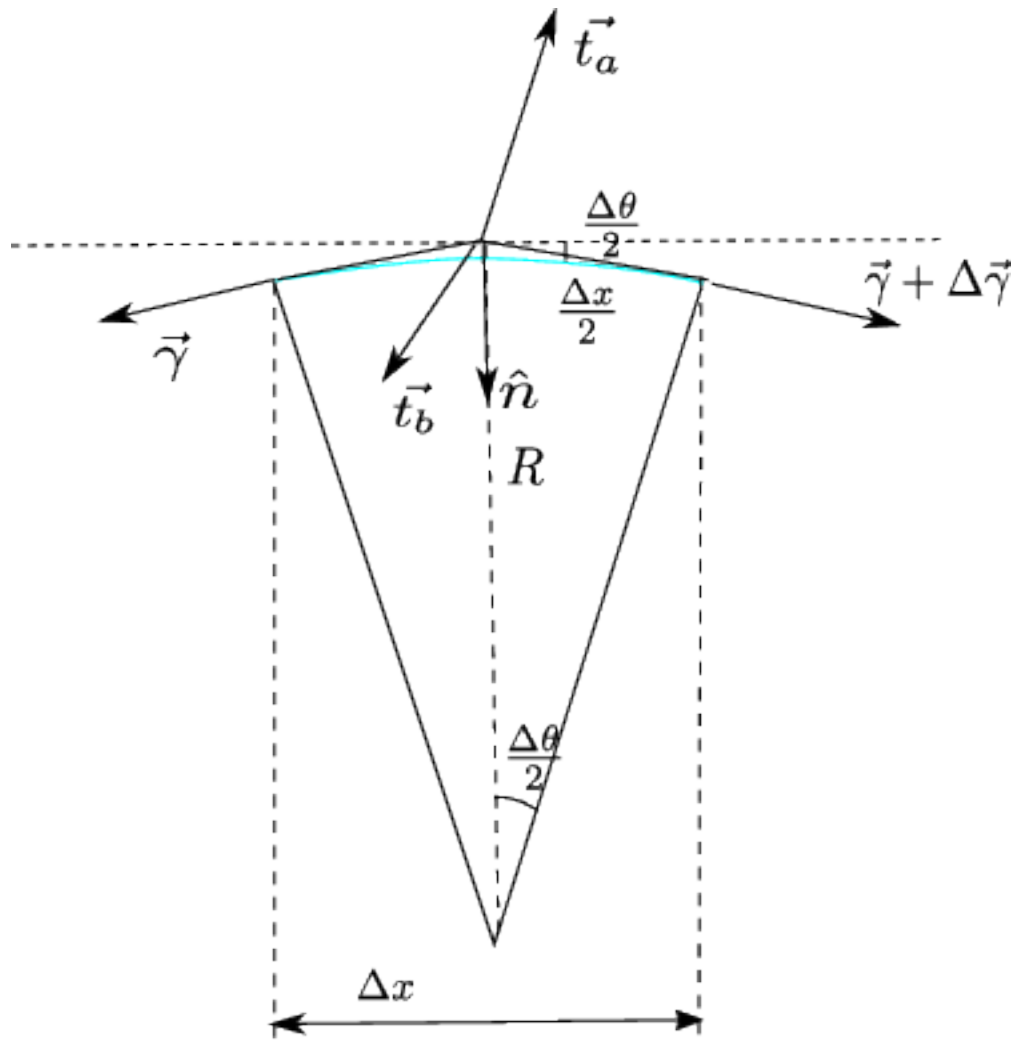
Ora dovrebbe apparire chiaro come non sia possibile determinare il valore assoluto delle pressioni P_1, P_2, P_A, P_B solamente da una misura di pressione con un manometro *differenziale*: questi valori sono noti a meno di una costante additiva a , indeterminata. Al contrario, la differenza di due di questi valori, come $\Delta P = P_B - P_A$, è unica (e uguale al risultato ottenuto nello svolgimento del problema): l'unicità di ΔP dipende dalla forma dei vettori del nucleo di \underline{A} che hanno componente ΔP nulla.

2.1 Young-Laplace Law

The interface between two liquids can be modeled as a membrane, a two-dimensional surface within which a force per unit length acts tangentially to the surface itself. The force per unit thickness γ acting in the membrane is defined as *surface tension*. The Young-Laplace law relates the surface tension, the pressure difference across the interface, and the curvature of the surface itself. In the case of constant surface tension, the following relation holds:

$$p_b - p_a = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 2\gamma H$$

where R_1 and R_2 are the principal radii of curvature of the surface, and H is the mean curvature.



2.2 Young-Laplace Law in Two Dimensions

The Young-Laplace law is derived in two dimensions by writing the equilibrium of a membrane element (one-dimensional) subject to the stresses exerted by the two fluids on it and the surface tension within it. The vector equilibrium equation is projected in the normal and tangential directions to the surface. The surface near a point is approximated as an infinitesimal arc of a circle, as shown in the figure.

An infinitesimal surface element of size $\Delta x \sim R\Delta\theta$ is considered. The angle $\Delta\theta$ is also «small» ($\cos \Delta\theta \sim 1$, $\sin \Delta\theta \sim \Delta\theta$), so the size of the surface element is approximated by its projection on a plane normal to $\hat{\mathbf{n}}$, ... R is the radius of curvature of the surface.

We write the equilibrium:

$$\mathbf{t}_a \Delta x + \mathbf{t}_b \Delta x - \mathbf{f}(x) + \mathbf{f}(x) + \Delta \mathbf{f} = 0$$

Projecting in the normal and tangential directions to the surface:

$$\begin{aligned} (t_{a_n} + t_{b_n})\Delta x + \gamma \sin \frac{\Delta\theta}{2} + (\gamma + \Delta\gamma) \sin \frac{\Delta\theta}{2} &= 0 \\ (t_{a_t} + t_{b_t})\Delta x - \gamma \cos \frac{\Delta\theta}{2} + (\gamma + \Delta\gamma) \cos \frac{\Delta\theta}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Substituting the approximated values for $\sin \Delta\theta$ and $\cos \Delta\theta$, and neglecting higher-order terms ($\Delta\gamma\Delta\theta$):

$$\begin{aligned}(t_{a_n} + t_{b_n})\Delta x + 2\gamma\frac{\Delta\theta}{2} &= 0 \\ (t_{a_t} + t_{b_t})\Delta x + \Delta\gamma &= 0\end{aligned}$$

If we identify the coordinate describing the surface with the coordinate x , we can approximate $\Delta\gamma \sim \frac{\partial\gamma}{\partial x}\Delta x$. Using the relation $\frac{\Delta x}{2} \sim R\frac{\Delta\theta}{2}$ and simplifying Δx :

$$\begin{aligned}(t_{a_n} + t_{b_n}) + \frac{\gamma}{R} &= 0 \\ (t_{a_t} + t_{b_t}) + \frac{\partial\gamma}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

In the case of a static problem, the **only** stress on the fluid comes from pressure, which acts normal to the surface: $\mathbf{t}_a = -P_a\hat{\mathbf{n}}_a$, $\mathbf{t}_b = -P_b\hat{\mathbf{n}}_b$. The stress that the fluid exerts on the interface is equal in magnitude and opposite in direction. The two normals are opposite to each other: we choose to define the normal $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_a = -\hat{\mathbf{n}}_b$. Consequently, the components of the stresses on the interface projected along $\hat{\mathbf{n}}$ and a tangential unit vector are: $t_{a_n} = P_a$, $t_{b_n} = -P_b$, $t_{a_t} = 0$, $t_{b_t} = 0$. If γ is constant (surface tension can have non-zero gradients due to temperature or concentration differences), the tangential equilibrium is identically satisfied.

$$P_a - P_b + \frac{\gamma}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_b - P_a = \frac{\gamma}{R}$$

2.2.1 Extension to the 3D Case

To extend the derivation to the 3D case, where the surface is two-dimensional, we proceed similarly to the previous paragraph. The curvature of a surface must be considered, not of a curve (there are two radii of curvature)... A useful introduction to *differential geometry* of curves and surfaces is available online at:

[Differential Geometry, Shiffrin](#)

The existence of surface tension explains the phenomena of capillarity, the presence of menisci at the interface between two fluids, the ability of insects or paper clips to float on water, the formation of «minimal» soap film surfaces, the wetting properties of surfaces, and the breakup of small-diameter jets into droplets. Finally, it can even be used as an unconventional propulsion method for paper boats:

[Boat without a motor - Marangoni effect](#)

2.3 Exercises

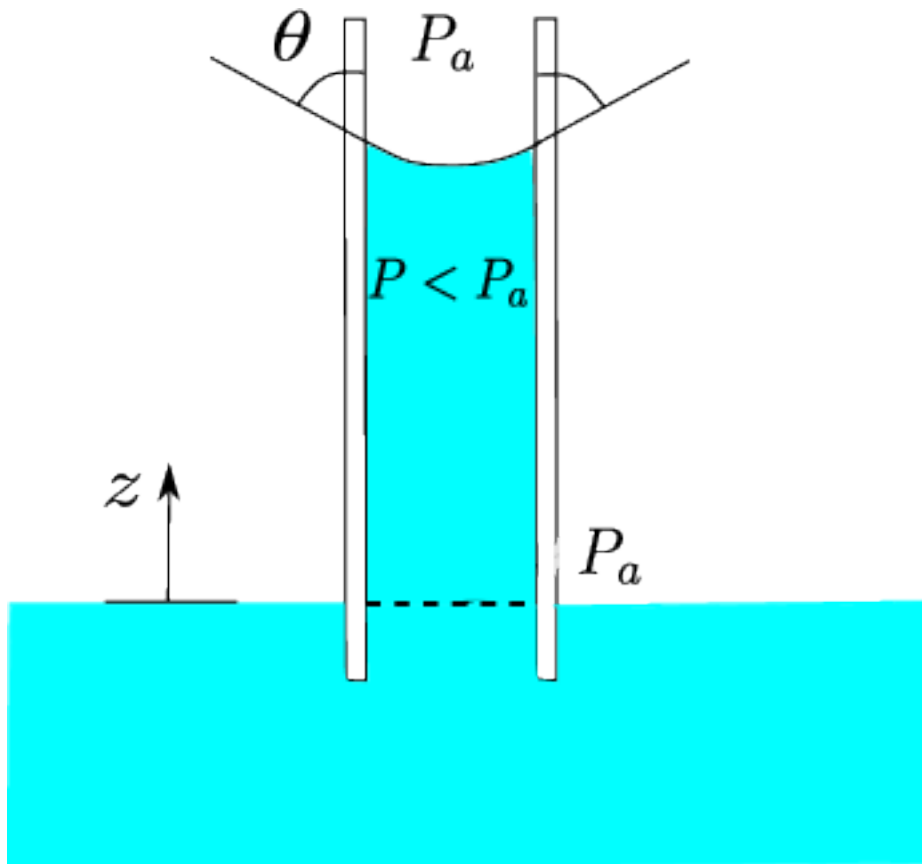
Exercise 2.1 Let θ be the contact angle at the interface between air, liquid, and solid; let γ be the surface tension between air and liquid; let ρ be the density of the liquid. Determine the height h of the liquid column in a cylindrical tube of radius $r = 0.5 \text{ mm}$ relative to the level in the reservoir. Then calculate the pressure inside the column. (It can be assumed that the pressure acting on the reservoir and on the top surface of the liquid in the tube is the same.)

Assume thermodynamic conditions and tube material such that:

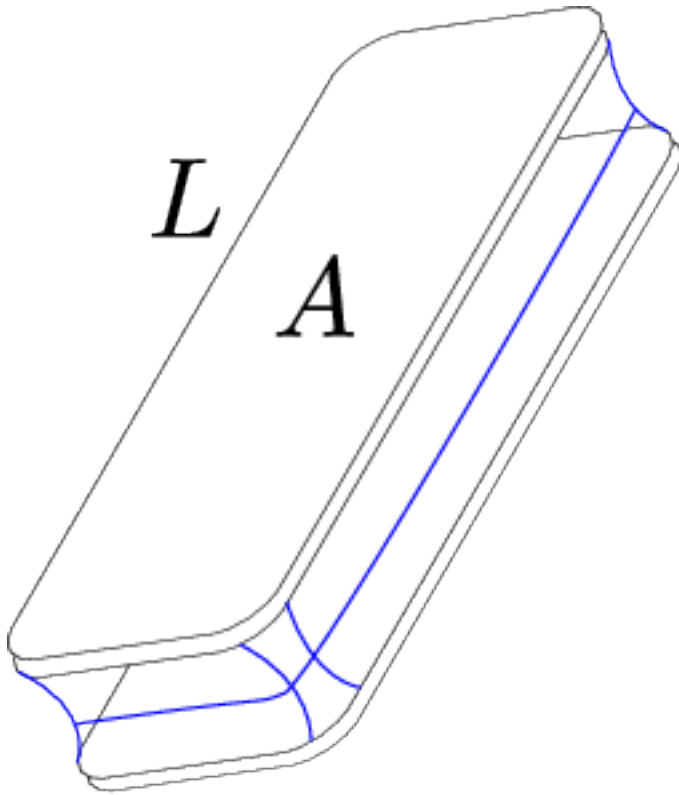
if the liquid is water: $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$, $\theta = 1^\circ$, $\gamma = 0.073 \text{ N/m}$.

if the liquid is mercury: $\rho = 13579 \text{ kg/m}^3$, $\theta = 140^\circ$, $\gamma = 0.559 \text{ N/m}$.

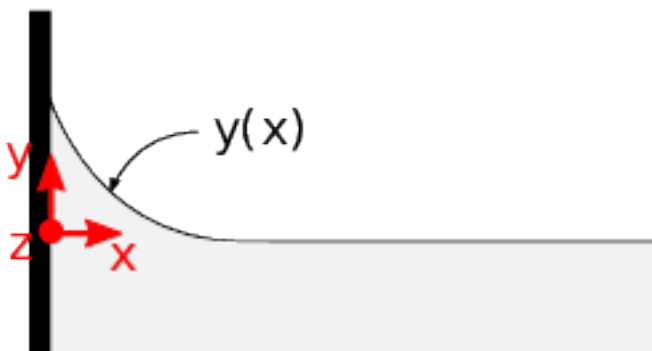
($h_{H_2O} = 2.97 \text{ cm}$, $P_{H_2O} - P_0 = -291.95 \text{ Pa}$; $h_{Hg} = -1.28 \text{ cm}$, $P_{Hg} - P_0 = 1712.87 \text{ Pa}$)



Exercise 2.2 Two identical flat parallel plates are separated by a distance d . A thin layer of liquid is present between the plates. The surface area A and perimeter L of the two plates are known, as well as the ambient pressure p_a , the surface tension γ of the liquid, and the contact angle θ . Determine the component of the force acting **perpendicular** to the plates on each of them.



Exercise 2.3 Determine the shape of the free surface between air and water, with density ρ , near an infinite flat wall, given the surface tension γ and the contact angle θ at the wall. The air pressure is uniform and equal to P_a .



2.3.1 Exercise 2.1

Exercise 2.1 Let θ be the contact angle at the interface between air, liquid, and solid; let γ be the surface tension between air and liquid; let ρ be the density of the liquid.

Determine the height h of the liquid in a cylindrical capillary tube of radius $r = 0.5 \text{ mm}$ relative to the level in the reservoir.

Then calculate the pressure inside the column.

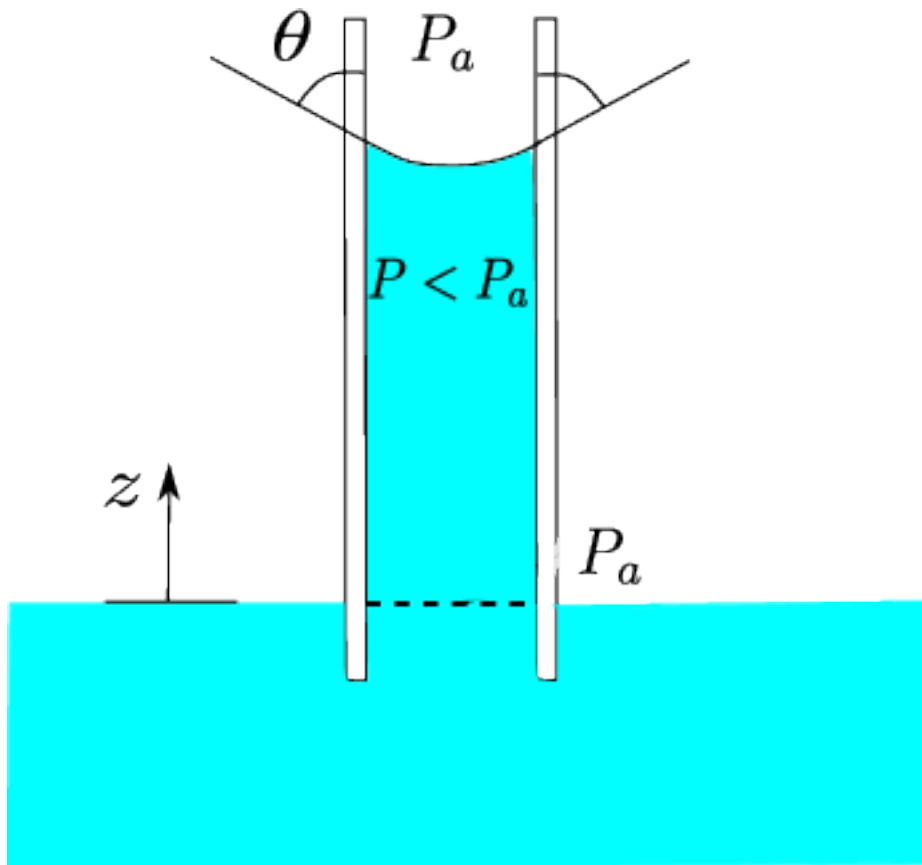
(We can assume the approximation that the pressure acting on the reservoir and on the top surface of the liquid in the capillary is equal.)

Assume thermodynamic conditions and tube material such that:

if the liquid is water: $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$, $\theta = 1^\circ$, $\gamma = 0.073 \text{ N/m}$

if the liquid is mercury: $\rho = 13579 \text{ kg/m}^3$, $\theta = 140^\circ$, $\gamma = 0.559 \text{ N/m}$

($h_{H_2O} = 2.97 \text{ cm}$, $P_{H_2O} - P_0 = -291.95 \text{ Pa}$; $h_{Hg} = -1.28 \text{ cm}$, $P_{Hg} - P_0 = 1712.87 \text{ Pa}$)



Concepts. Surface tension. Contact angle. Capillarity. Meniscus.

Solution. By writing the equilibrium for the volume of fluid in the capillary, the height h is obtained. Then the pressure p is found using Stevin's law. Finally, observations are made about the contact angle, meniscus, and pressure jump across the interface.

- Write the equilibrium for the fluid volume. This is a statics problem. The acting forces are the surface tension (acting on the perimeter of the top surface) and the weight force, since by assumption the pressure acting on the top surface equals ambient pressure P_a (So??? Why is the vertical component of the external pressure resultant zero??? See figure below).

$$F_\gamma = F_g \quad \Rightarrow \quad 2\pi r \gamma \cos \theta = \pi r^2 h \rho g$$

And therefore:

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r} \Rightarrow \begin{cases} h_{H_2O} = 2.97 \text{ cm} \\ h_{Hg} = -1.28 \text{ cm} \end{cases}$$

Comments on the result.

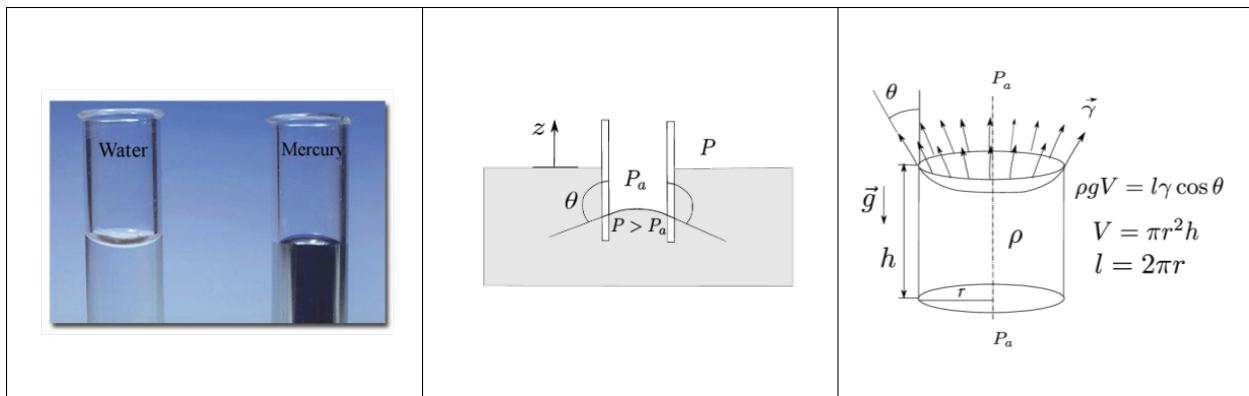
The capillarity effect is more significant for narrow tubes (inverse proportionality with $1/r$). The height h can be either positive or negative depending on the contact angle: $h \leq 0$ for $\theta \geq \pi/2$.

- Calculate the pressure in the fluid at the top of the column using Stevin's law:

$$P = P_0 - \rho g h = P_0 - \frac{2\gamma \cos \theta}{r} \Rightarrow \begin{cases} P_{H_2O} - P_0 = -291.95 \text{ Pa} \\ P_{Hg} - P_0 = 1712.87 \text{ Pa} \end{cases}$$

Comments on the result. These results are consistent (thankfully!) with the relationships between curvature (closely related to the meniscus and contact angle) and the pressure jump. See pictures below for a comparison of the experiment using either water ($\theta < \pi/2$) or mercury ($\theta > \pi/2$)

water	$\theta < \pi/2$	$h \geq 0$	$P \leq P_a$
mercury	$\theta > \pi/2$	$h \leq 0$	$P \geq P_a$



2.3.2 Exercise 2.2

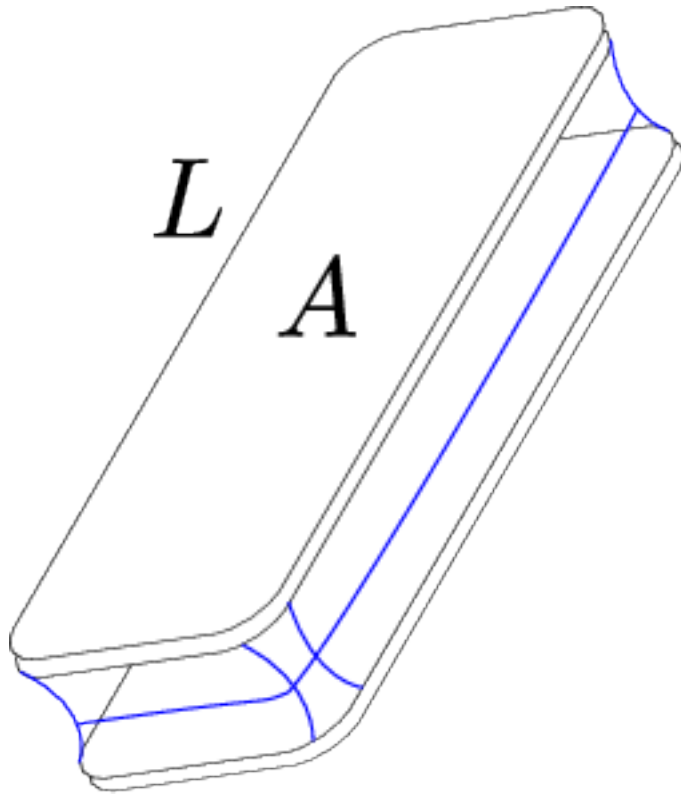
Exercise 2.2 Two equal, parallel flat plates are separated by a distance d .

A thin layer of liquid is present between the plates.

The area of the surfaces A and the perimeter L of the plates are known,

as well as the ambient pressure p_a , the surface tension of the liquid γ , and the contact angle θ .

The task is to determine the component of the force acting on each plate that is perpendicular to the plates.



Concepts. Surface tension. Contact angle.

Solution. The setup described in the exercise is an equilibrium condition.

The force acting on a plate is due to two effects: surface tension at the fluid perimeter, and the pressure difference between the fluid and the ambient.

We consider the force positive if it is attractive.

$$F = F_\gamma + F_p$$

- Calculation of F_γ :

$$F_\gamma = \gamma L \sin \theta$$

- Calculation of F_p . The pressure jump is obtained by applying interfacial equilibrium:

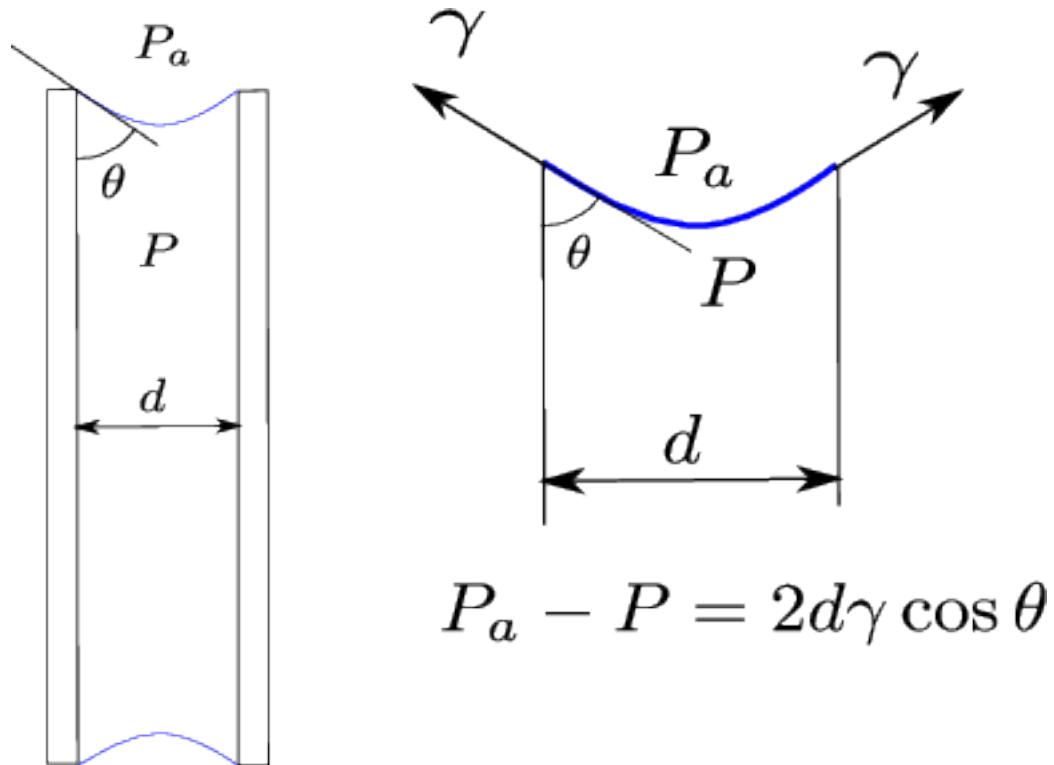
$$F_p = (p_a - p)A$$

with:

$$(p_a - p)d = 2\gamma \cos \theta$$

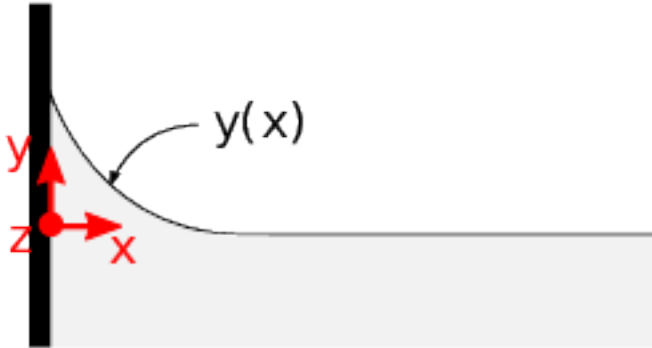
- The total requested component is thus:

$$F = \frac{2\gamma A \cos \theta}{d} + L\gamma \sin \theta$$



2.3.3 Exercise 2.3

Exercise 2.3 We want to calculate the shape of the free surface between air and water, of density ρ , near an infinite flat wall, knowing the surface tension γ and the contact angle θ at the wall. The air pressure is uniform and equal to P_a .



Since the problem is studied near an infinite flat wall, it is reasonable to assume that the solution does not depend on the coordinate describing the wall's length, namely the z coordinate (see diagram, TODO). The **Young-Laplace equation** for a 2D surface in 3D space,

$$P_1 - P_2 = \gamma \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right],$$

reduces to the case of a 1D surface in 2D space, where the contact surface is flat in the z direction.

If $R := R_1$ is the curvature radius in the x - y plane and R_2 is the radius in the z - y plane, the Young-Laplace equation simplifies to:

$$P_1 - P_2 = \frac{\gamma}{R} =: \gamma k,$$

since $R_2 \rightarrow \infty$ — because the surface height does not vary with z at fixed x — the radius of curvature in that direction is infinite. We define the curvature $k := 1/R$.

The pressure in the air is constant, $P_2 = P_a$. The pressure $P_1(x)$ in the water at the interface can be calculated using **Stevino's law**:

$$P_1(x) - P_a = \rho g y(x),$$

where $y(x)$ is the height of the free surface, relative to the reference level $y = 0$, which is chosen such that the water pressure is equal to P_a . Substituting into the Young-Laplace equation gives:

$$\rho g y(x) = \gamma k(x).$$

Recall that the curvature of a surface described by $y(x)$ is given by (TODO: add derivation?):

$$k(x) = \frac{y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{3/2}},$$

leading to the nonlinear differential equation governing the free surface shape:

$$\begin{cases} \rho g y(x) - \frac{y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{3/2}} = 0 \\ y'(x = 0) = -\frac{1}{\tan \theta} \\ y(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \end{cases}$$

This is the Young-Laplace equation with boundary conditions: one at the wall ($x = 0$), relating the surface slope to the contact angle, and one at infinity ensuring the surface returns to the flat level where the pressure equals P_a .

Letting $a^2 := \frac{2\gamma}{\rho g}$, and integrating the equation once, we get:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{1}{(1 + y'(x)^2)^{1/2}} = A,$$

where A is the integration constant. To ensure $y(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ with a «reasonable smoothness,» we also require $y'(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, which implies $A = 1$.

A second integration of the equation:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{1}{(1 + y'(x)^2)^{1/2}} = 1,$$

yields the analytical solution (TODO: add derivation):

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2 - y(x)^2}} + \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{Ch}^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}a}{y(x)} \right) = x + B,$$

with B determined from the wall boundary condition.

Remark.

This problem provides an example of how to compute the shape of a fluid interface. Despite being one of the simplest imaginable cases, its analytical solution already requires significant effort. Enthusiasts are invited to compute the interface shape between air and water confined between two vertical walls, by numerically solving the nonlinear differential problem (an analytical solution exists, but is even more “cryptic” than the one derived above):

$$\begin{cases} \rho g y(x) - \frac{y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{3/2}} = 0 & , \quad x \in [0, L] \\ y'(x = 0) = -\frac{1}{\tan \theta} \\ y'(x = L) = \frac{1}{\tan \theta} \end{cases}$$

La cinematica è la parte della meccanica che studia il moto di sistemi, indipendentemente dalle cause che lo generano, a differenza della dinamica. Prima di ricavare le equazioni che descrivono la dinamica di un fluido, sembra quindi opportuno concentrarsi sulla sua cinematica.

La cinematica e la dinamica dei mezzi continui, come ad esempio i solidi o i fluidi, possono essere descritte con un approccio lagrangiano o euleriano. La **descrizione lagrangiana**, utilizzata spesso in meccanica dei solidi, consiste nel seguire nello spazio il moto delle singole particelle del mezzo continuo. La **descrizione euleriana**, utilizzata spesso in meccanica dei fluidi, consiste nel descrivere l'evoluzione del mezzo continuo utilizzando come variabili indipendenti sia la variabile spaziale \mathbf{r} sia la variabile temporale t .

3.1 Descrizione integrale lagrangiana ed euleriana

In una descrizione *integrale* del fenomeno, l'approccio lagrangiano segue l'evoluzione di un **volume materiale**, i cui punti si muovono in maniera solidale con il mezzo continuo. In un approccio euleriano invece viene introdotto un **volume di controllo**, fisso nello spazio, e i flussi delle quantità meccaniche (massa, quantità di moto, energia, ...) contribuiscono al bilancio delle quantità meccaniche relative al volume di controllo considerato. Queste due descrizioni sono casi particolari di un approccio generale al problema, definito *ALE* (arbitrario lagrangiano-euleriano), che descrive l'evoluzione di un volume in moto arbitrario. Le tre diverse descrizioni del problema possono essere messe in relazione tra di loro, tramite le formule di Leibniz, che forniscono l'espressione della derivata temporale di integrali su domini dipendenti dal tempo. Si riporta qui, senza dimostrazione, il **teorema del trasporto di Reynolds**

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \oint_{S(t)} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

che fornisce l'espressione della derivata temporale dell'integrale della funzione $f(\mathbf{x}, t)$ (che può essere scalare, vettoriale o in generale tensoriale) nel volume mobile $V(t) \ni \mathbf{x}$, la cui frontiera $S(t)$ si muove con velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}_s, t)$, $\mathbf{x}_s \in S(t)$. La normale $\hat{\mathbf{n}}$ alla superficie $S(t)$ è uscente dal volume $V(t)$. Si rimanda all'appendice «Richiami di analisi» per la dimostrazione del teorema e per le formule della derivata temporale di flussi e circuitazioni su domini dipendenti dal tempo. Siano ora

- $V(t)$ un volume materiale, la cui frontiera si muove con la velocità del fluido $\mathbf{v} = \mathbf{u}$

- V_c un volume di controllo, la cui frontiera è fissa nello spazio, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
- $v(t)$ un volume in moto arbitrario, la cui frontiera si muove con velocità generica \mathbf{v} .

Come si vedrà nel capitolo sui «Bilanci integrali», il bilancio integrale di una quantità meccanica f in un volume materiale $V(t)$ descrive la variazione nel tempo dell'integrale $\int_{V(t)} f$. Il teorema di Reynolds applicato all'integrale svolto su un volume materiale $V(t)$ e all'integrale svolto sul volume in moto generico $v(t)$, coincidente con $V(t)$ all'istante di tempo t considerato,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} f &= \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \oint_{S(t)} f \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t) \equiv V(t)} f &= \int_{v(t) \equiv V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \oint_{s(t) \equiv S(t)} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \end{aligned}$$

permette di ricavare il legame tra la descrizione lagrangiana e una descrizione arbitraria del problema. Confrontando le ultime due espressioni, si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f = \frac{d}{dt} \int_{v(t) \equiv V(t)} f + \oint_{s(t) \equiv S(t)} f (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

Dalla formula scritta per il volume arbitrario $v(t)$, si ricava il legame tra a descrizione lagrangiana e la descrizione euleriana del problema, considerando il volume arbitrario coincidente con un volume di controllo V_c fisso, per il quale $\mathbf{v} = \mathbf{0}$,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f = \frac{d}{dt} \int_{V_c \equiv V(t)} f + \oint_{S_c \equiv S(t)} f \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

3.2 Descrizione puntuale lagrangiana ed euleriana

In una descrizione *puntuale* del fenomeno, vengono introdotti due sistemi di coordinate: uno è solidale con il mezzo continuo dipendente dal tempo, mentre l'altro è fisso. Si può pensare al sistema di riferimento solidale con il continuo come un'«etichetta» che viene applicata a ogni **punto materiale** del mezzo continuo stesso. Un sistema di riferimento fisso, invece, è indipendente dal moto del mezzo continuo, come ad esempio un sistema di coordinate cartesiane, la cui origine e i cui assi sono fissi nel tempo. Mentre il mezzo continuo evolve nel tempo (trasla, ruota, si deforma ...), un punto materiale ha coordinate costanti \mathbf{x}_0 rispetto al sistema di riferimento «solidale al volume», cioè che si muove e si deforma insieme al volume: questa coordinata, detta lagrangiana, può essere pensata come l'«etichetta» assegnata al punto materiale del continuo. Le coordinate euleriane $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ del punto materiale con coordinate lagrangiane \mathbf{x}_0 , ne descrivono il moto nel sistema di riferimento fisso e in generale sono una funzione del tempo

Il sistema di riferimento solidale al corpo dipende dal tempo, mentre le coordinate lagrangiane \mathbf{x}_0 di un punto materiale sono costanti. Il sistema di riferimento fisso è indipendente dal tempo, mentre le coordinate euleriane \mathbf{x} di un punto materiale del volume (quindi con \mathbf{x}_0 costante) sono dipendenti dal tempo.

Assumendo che all'istante $t = 0$ i due sistemi di coordinate coincidano, e che quindi coincidano anche le coordinate euleriane e lagrangiane $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0$, le coordinate lagrangiane \mathbf{x}_0 rappresentano la configurazione (iniziale) di riferimento della configurazione attuale $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$. La trasformazione $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ descrive l'evoluzione nel tempo t dei punti $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ appartenenti al volume $V_0 = V(0)$, all'istante iniziale. La velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ del mezzo continuo nel punto $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$, per definizione di punto materiale, coincide con la velocità $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}_0, t)$ del punto etichettato con \mathbf{x}_0 : questa è la derivata nel tempo della sua posizione \mathbf{x} , cioè con la derivata nel tempo della mappa $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ a coordinata lagrangiana (che identifica la particella) costante,

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}_0, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} (\mathbf{x}_0, t) =: \frac{d\mathbf{x}}{dt} (\mathbf{x}_0, t) =: \frac{D\mathbf{x}}{Dt} (\mathbf{x}_0, t),$$

dove è stato introdotto il simbolo D/Dt di **derivata materiale** che rappresenta l'evoluzione della quantità alla quale è applicata, seguendo il moto del mezzo continuo: la derivata materiale rappresenta la variazione nel tempo della quantità

«sentita» dalle singole particelle materiali. Nella descrizione euleriana del problema, i campi sono funzioni delle variabili indipendenti spazio \mathbf{x} e tempo t . Data una funzione $f(\mathbf{x}, t)$ (scalare, vettoriale, tensoriale), viene indicata con

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} (\mathbf{x}, t),$$

la derivata parziale rispetto al tempo, che rappresenta la variazione della quantità $f(\mathbf{x}, t)$ nel punto fisso \mathbf{x} dello spazio, che coordinata euleriana costante.

È possibile trovare il legame tra le due derivate utilizzando la *regola di derivazione di funzioni composte* e la funzione $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ che descrive il moto dei punti materiali del sistema. Data una funzione $f(\mathbf{x}, t)$ (rappresentazione euleriana), viene definita $f_0(\mathbf{x}_0, t)$ come la funzione composta $f_0 = f \circ \mathbf{x}$ (descrizione lagrangiana). Ipotizzando poi che si possano esprimere le coordinate lagrangiane come funzione di quelle euleriane, $\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t)$, è possibile scrivere $f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t) = f_0(\mathbf{x}_0, t) = f_0(\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t), t)$. Utilizzando la regola di derivazione per le funzioni composte, si ottiene il legame cercato,

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_t \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} + \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_t = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f, \end{aligned}$$

dove si è indicato con $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} (\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t), t)$ il campo di velocità riferito a una descrizione euleriana del problema e si è riconosciuto l'operatore ∇ nell'ultimo passaggio. Infine è possibile «rimuovere» la funzione f per ottenere la relazione tra la forma delle due derivate, valida per funzioni scalari, vettoriali, tensoriali,

$$\frac{D-}{Dt} := \frac{d-}{dt} := \frac{\partial -}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} = \frac{\partial -}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla -.$$

Come esempio, applichiamo la regola (`[eqn:cin:lagr-eul]{reference-type=>ref} reference=>eqn:cin:lagr-eul`) per ricavare la forma euleriana e lagrangiana del campo di velocità e di accelerazione delle particelle del continuo. Il campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ si ottiene dalla derivata materiale della trasformazione $\mathbf{x}(x_0, t)$,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \underbrace{\mathbf{u}_0(\mathbf{x}_0, t) \cdot \nabla \mathbf{x}}_{=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}_0, t).$$

In questo caso, non è stato ottenuto nulla di nuovo. Il campo di accelerazione nella descrizione euleriana del fenomeno viene ottenuto calcolando l'accelerazione delle particelle materiali con la derivata materiale alla velocità. Per componenti, l'accelerazione della particella materiale identificata con \mathbf{x}_0 è

$$a_i(\mathbf{x}, t) = \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

Introducendo l'operatore advettivo $\mathbf{v} \cdot \nabla$, è possibile scrivere il campo di accelerazione (che comparirà nel bilancio della quantità di moto) in forma vettoriale

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{D\mathbf{u}}{Dt}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t),$$

dove sono stati esplicitati gli argomenti (\mathbf{x}, t) delle funzioni, per evidenziare la rappresentazione euleriana.

Una volta compresa la differenza tra le due descrizioni del problema, non è necessario esprimere in maniera esplicita gli argomenti delle funzioni. Da qui in avanti, verrà privilegiata una descrizione euleriana, per campi, del problema.

In alcuni casi, come ad esempio problemi che riguardano lo studio di correnti attorno a corpi mobili, può essere conveniente utilizzare una rappresentazione arbitraria del problema, descrivendo il fenomeno seguendo l'evoluzione delle

grandezza meccaniche su punti, «etichettati» dalla coordinata arbitraria \mathbb{P} , il cui moto è descritto in coordinate euleriane dalla funzione $\mathbf{x}(\mathbb{P}, t)$. Seguendo lo stesso procedimento svolto per le particelle materiali, la velocità \mathbf{v} di questi punti in moto arbitrario è uguale alla derivata parziale

$$\mathbf{v} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbb{P}},$$

svolta a coordinata \mathbb{P} costante. Ancora seguendo lo stesso procedimento svolto in precedenza, è possibile ricavare la relazione tra la rappresentazione arbitraria e quella euleriana,

$$\left. \frac{\partial _}{\partial t} \right|_{\mathbb{P}} = \left. \frac{\partial _}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{_}.$$

e, confrontando la ([eqn:cin:lagr-eul]{reference-type=>ref} reference=>eqn:cin:lagr-eul}) e la ([eqn:cin:ale-eul]{reference-type=>ref} reference=>eqn:cin:ale-eul}), la relazione tra la rappresentazione arbitraria e quella lagrangiana,

$$\left. \frac{\partial _}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} = \left. \frac{\partial _}{\partial t} \right|_{\mathbb{P}} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \nabla_{_}.$$

3.3 Velocità di traslazione, rotazione e deformazione

In questa sezione viene studiato il moto di un segmento materiale, che segue il moto del mezzo continuo. Viene introdotto il tensore gradiente di velocità $\nabla \mathbf{u}$, con $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ il campo di velocità. Questo tensore viene prima scritto come somma della sua parte antisimmetrica \mathbb{W} e della sua parte simmetrica \mathbb{D} , la quale può essere a sua volta scomposta nella parte idrostatica e nella parte deviatorica \mathbb{D}^d . Viene infine descritta la natura di questi tensori grazie alla loro influenza sul moto di segmento materiale.

Il segmento materiale viene identificato dal vettore $\Delta \mathbf{x}_{12}(t) = \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)$, i cui estremi sono i punti di coordinate $\mathbf{x}_1(t)$ e $\mathbf{x}_2(t)$. Indicando con $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t)$ e $\mathbf{u}_2(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_2(t), t)$ loro velocità, è possibile ricavare l'evoluzione temporale del segmento materiale, $\Delta \mathbf{x}_{12}(t + \Delta t) = \Delta \mathbf{x}_{12}(t) + (\mathbf{u}_2(t) - \mathbf{u}_1(t)) \Delta t + o(\Delta t)$. Tornando alla descrizione euleriana del problema, è possibile scrivere la differenza di velocità introducendo il tensore gradiente di velocità,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2(t) - \mathbf{u}_1(t) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}_2(t), t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) = \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t) + \Delta \mathbf{x}_{12}(t), t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) = \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) \cdot \Delta \mathbf{x}_{12}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) + o(|\Delta \mathbf{x}_{12}(t)|) = \\ &= \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) \cdot \Delta \mathbf{x}_{12}(t) + o(|\Delta \mathbf{x}_{12}(t)|). \end{aligned}$$

Riarrangiando i termini si può scrivere,

$$\Delta \mathbf{x}_{12}(t + \Delta t) = \Delta \mathbf{x}_{12}(t) + [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) \cdot \Delta \mathbf{x}_{12}(t) + o(|\Delta \mathbf{x}_{12}(t)|)] \Delta t + o(\Delta t).$$

e facendo tendere a zero Δt , si ricava

$$\frac{d\Delta \mathbf{x}_{12}}{dt}(t) = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) \cdot \Delta \mathbf{x}_{12}(t) + o(|\Delta \mathbf{x}_{12}(t)|).$$

Nell'ipotesi che i termini $o(|\Delta \mathbf{x}_{12}(t)|)$ siano trascurabili, la velocità \mathbf{u}_2 del punto \mathbf{x}_2 differisce dalla velocità \mathbf{u}_1 del punto \mathbf{x}_1 del termine $d\Delta \mathbf{x}_{12}/dt$ che rappresenta le eventuali rotazioni rigide e le deformazioni del mezzo continuo,

$$\mathbf{u}_2(t) = \mathbf{u}_1(t) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) \cdot \Delta \mathbf{x}_{12}(t).$$

3.3.1 Tensore gradiente di velocità

Il tensore gradiente di velocità può essere scritto come somma $\nabla \mathbf{u} = \mathbb{D} + \mathbb{W}$ della sua parte simmetrica \mathbb{D} , il **tensore velocità di deformazione**, e della sua parte antisimmetrica \mathbb{W} , il **tensore di spin**,

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \quad , \quad \mathbb{W} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - \nabla^T \mathbf{u}) \quad ,$$

i quali possono essere scritti in componenti, in un sistema di coordinate cartesiane come

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad , \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad .$$

Il tensore velocità di deformazione può essere poi scomposto nella sua parte idrostatica e nella sua parte deviatorica \mathbb{D}^d ,

$$\mathbb{D} = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbb{D}) \mathbb{I} + \mathbb{D}^d \quad , \quad \mathbb{D}^d = \mathbb{D} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbb{D}) \mathbb{I} \quad ,$$

dove la traccia $\text{tr}(\mathbb{D})$ è uguale alla divergenza del campo di velocità $\nabla \cdot \mathbf{u}$. Il tensore di spin è un tensore antisimmetrico del secondo ordine. Nello spazio tridimensionale ha solo tre componenti indipendenti, che contengono le componenti del vettore vorticità $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$. Ad esempio, utilizzando un sistema di coordinate cartesiane, è possibile scrivere il tensore di spin come

$$\mathbb{W} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \text{Spin}(\boldsymbol{\omega}) \quad .$$

L'operazione $\mathbb{W} \cdot \mathbf{v}$ tra il tensore antisimmetrico $\mathbb{W} = \text{Spin}(\boldsymbol{\omega})$ e un vettore \mathbf{v} qualsiasi coincide con l'operazione $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$. Introducendo la scomposizione di $\nabla \mathbf{u}$ nella formula (eqn:cin:relative-vel-1){reference-type=»ref» reference=»eqn:cin:relative-vel-1»}, si ricava

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2(t) = \mathbf{u}_1(t) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_1(t), t) \times (\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)) + \quad & \text{(atto di moto rigido)} \\ + \mathbb{D}(\mathbf{x}_1(t), t) \cdot (\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)) \quad & \text{(deformazione)} \end{aligned}$$

Da questa formula si possono riconoscere i contributi alla velocità \mathbf{u}_2 di «traslazione» (la velocità del punto \mathbf{x}_1), di rotazione con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}$ e di deformazione, $\mathbb{D} \cdot \Delta \mathbf{x}_{12}$.

3.3.2 Derivate temporali di oggetti materiali

In questa sezione vengono descritti gli effetti dei singoli termini nei quali può essere scomposto il gradiente di velocità tramite i loro effetti sull'evoluzione di un segmento materiale \mathbf{v} o di una combinazione di segmenti materiali «elementari» (come ad esempio il prodotto scalare o il triplo prodotto), per i quali i termini di ordine $o(|\mathbf{v}|)$ sono considerati trascurabili.

Vettore materiale.

Scrivendo il vettore \mathbf{v} come prodotto del suo modulo v per il versore $\hat{\mathbf{n}}$ che ne identifica la direzione, $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{n}}$, è possibile esprimerne la derivata nel tempo come,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{n}} + v \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt} \quad .$$

Vettore materiale: modulo.

Utilizzando l'identità $\dot{\hat{\mathbf{n}}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0^1$, moltiplicando scalarmente per $\hat{\mathbf{n}}$ l'ultima espressione, si ricava la derivata nel tempo del modulo v del vettore \mathbf{v} ,

$$\frac{dv}{dt} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \underbrace{v \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{n}}}_{=0} = \hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbb{D} + \mathbb{W}] \cdot \mathbf{v} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} v,$$

avendo introdotto la scomposizione $\nabla \mathbf{u} = \mathbb{D} + \mathbb{W}$ nella formula ([eqn:cin:material-segm]{reference-type=>ref} reference=>eqn:cin:material-segm}) applicata al vettore materiale \mathbf{v} e utilizzato l'identità $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{W} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, poiché \mathbb{W} è antisimmetrica. Poichè il tensore velocità di deformazione è simmetrico, esiste una base di vettori ortonormali $\{\hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{p}}_2, \hat{\mathbf{p}}_3\}$ che permettono di scrivere la decomposizione spettrale di \mathbb{D} ,

$$\mathbb{D} = \lambda_1 \hat{\mathbf{p}}_1 \otimes \hat{\mathbf{p}}_1 + \lambda_2 \hat{\mathbf{p}}_2 \otimes \hat{\mathbf{p}}_2 + \lambda_3 \hat{\mathbf{p}}_3 \otimes \hat{\mathbf{p}}_3.$$

I vettori $\hat{\mathbf{p}}_i$ sono gli autovettori del tensore \mathbb{D} che ne rappresentano le *direzioni principali*, mentre gli scalari λ_i sono gli autovalori associati, tali che $\mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{p}}_i = \lambda_i \hat{\mathbf{p}}_i$. È quindi possibile scrivere la derivata nel tempo del modulo v del vettore materiale \mathbf{v} come

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = \lambda_1 n_1^2 + \lambda_2 n_2^2 + \lambda_3 n_3^2,$$

avendo indicato con $n_i = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_i$ le proiezioni del versore $\hat{\mathbf{n}}$ sugli autovettori del tensore \mathbb{D} .

Vettore materiale: direzione.

Combinando la ([eqn:cin:dvec]{reference-type=>ref} reference=>eqn:cin:dvec}) e la ([eqn:cin:dvmod]{reference-type=>ref} reference=>eqn:cin:dvmod}), è possibile ricavare la derivata nel tempo della direzione $\hat{\mathbf{n}}$ del vettore materiale \mathbf{v} ,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt} &= \frac{1}{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{1}{v} \hat{\mathbf{n}} \frac{dv}{dt} = [\mathbb{D} + \mathbb{W}] \cdot \hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= [\mathbb{I} - \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}] \cdot \mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \mathbb{W} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= [\mathbb{I} - \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}] \cdot \mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{2} \mathbb{C} \times \hat{\mathbf{n}}. \end{aligned}$$

Il tensore $\mathbb{P} := \mathbb{I} - \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}$ è il proiettore ortogonale in direzione perpendicolare a $\hat{\mathbf{n}}$, che ha nucleo generato da $\hat{\mathbf{n}}$, cioè $\mathbb{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$. Introducendo la scomposizione del tensore \mathbb{D} nella sua parte idrostatica e deviatorica, è possibile dimostrare che la parte idrostatica non influenza la derivata del versore $\hat{\mathbf{n}}$

$$\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt} = [\mathbb{I} - \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}] \cdot \mathbb{D}^d \cdot \hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{2} \mathbb{C} \times \hat{\mathbf{n}},$$

poiché $\mathbb{P} \cdot \mathbb{I} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbb{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$. In generale quindi la direzione di un vettore materiale dipende dalle rotazioni, rappresentate dal termine $\frac{1}{2} \mathbb{C} \times \hat{\mathbf{n}}$ e dalla parte deviatorica del tensore velocità di deformazione. Questo ultimo contributo può essere nullo in alcuni casi, come ad esempio

- quando lo stato di deformazione è «idrostatico», per il quale $\mathbb{D}^d = 0$,
- quando il vettore \mathbf{v} appartenente al nucleo di \mathbb{D}^d , $\mathbb{D}^d \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, orientato cioè in una direzione che non subisce una deformazione deviatorica,
- quando il vettore \mathbf{v} è allineato con una delle direzioni principali $\hat{\mathbf{p}}_i$ di \mathbb{D} : in questo caso, il vettore $\mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ è allineato con $\hat{\mathbf{n}}$, poichè $\mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lambda_i \hat{\mathbf{n}}$, e quindi appartiene al nucleo del proiettore \mathbb{P} , cioè $\mathbb{P} \cdot (\mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{0}$.

¹ Poichè $\hat{\mathbf{n}}$ è un versore, $|\hat{\mathbf{n}}|^2 = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$. La derivata nel tempo di quest'ultima espressione diventa $0 = \dot{\hat{\mathbf{n}}} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{n}}} = 2\dot{\hat{\mathbf{n}}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$, da cui si ricava l'identità desiderata.

Angolo tra vettori materiali.

Calcolando la derivata materiale del prodotto scalare tra due vettori materiali \mathbf{v} e \mathbf{w} , è possibile verificare che il tensore di spin \mathbb{W} rappresenta una rotazione rigida, non modificando né i moduli dei singoli vettori materiali, né l'angolo compreso tra di essi. Infatti la derivata

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \\ &= \mathbf{w} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbb{W} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbb{W} \times \mathbf{w} = \\ &= 2\mathbf{w} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{v}, \end{aligned}$$

avendo utilizzato la simmetria del tensore velocità di deformazione \mathbb{D} e l'identità vettoriale $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{c}$. La derivata del coseno dell'angolo formato dai vettori materiali $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{n}}_v$, $\mathbf{w} = w\hat{\mathbf{n}}_w$ dipende solamente dalla parte deviatorica del tensore velocità di deformazione,

$$\begin{aligned} \frac{d \cos \theta_{vw}}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| |\mathbf{w}|} = \\ &= 2\hat{\mathbf{n}}_w \cdot \mathbb{D}^d \hat{\mathbf{n}}_v - \hat{\mathbf{n}}_v \cdot \hat{\mathbf{n}}_w (\hat{\mathbf{n}}_v \cdot \mathbb{D}^d \hat{\mathbf{n}}_v + \hat{\mathbf{n}}_w \cdot \mathbb{D}^d \hat{\mathbf{n}}_w) = \\ &= 2(1 - \hat{\mathbf{n}}_v \cdot \hat{\mathbf{n}}_w) \hat{\mathbf{n}}_w \cdot \mathbb{D}^d \hat{\mathbf{n}}_v - \hat{\mathbf{n}}_v \cdot \hat{\mathbf{n}}_w (\hat{\mathbf{n}}_v - \hat{\mathbf{n}}_w) \cdot \mathbb{D}^d \cdot (\hat{\mathbf{n}}_v - \hat{\mathbf{n}}_w). \end{aligned}$$

Volume generato da vettori materiali.

Infine, è possibile dimostrare che la derivata del volume materiale (elementare, per il quale i termini $o(|\Delta \mathbf{x}|)$ siano trascurabili) $V = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ del parallelepipedo formato dai tre vettori materiali \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} vale

$$\frac{dV}{dt} = (\nabla \cdot \mathbf{u})V.$$

La divergenza del campo di velocità rappresenta quindi la derivata nel tempo di un volume materiale relativa al volume materiale stesso. Il **vincolo cinematico di incomprimibilità** impone che l'estensione di un volume materiale non vari nel tempo, $dV/dt = 0$, ed è quindi equivalente alla condizione di solenoidalità del campo di velocità, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

3.4 Curve caratteristiche

Per descrivere il moto di un fluido vengono definite quattro famiglie di curve: le linee di corrente, le traiettorie, le curve di emissione (o linee di fumo) e le tracce. Viene data una definizione matematica di queste curve, che possono essere ottenute durante le attività sperimentali tramite delle tecniche di visualizzazione del campo di moto, come mostrato nel seguente video, [Stanford 1963 - Flow Visualization](https://www.youtube.com/watch?v=nuQyKGuXJOs). <https://www.youtube.com/watch?v=nuQyKGuXJOs>, nel caso non funzionasse il collegamento sopra a uno degli storici video del National Committee.

Come già anticipato, secondo la descrizione euleriana del moto di un mezzo continuo, il campo di velocità è rappresentato dalla funzione vettoriale \mathbf{u} i cui argomenti indipendenti sono la coordinata spaziale \mathbf{r} e quella temporale t , $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Vengono ora definite le quattro curve caratteristiche elencate sopra:

- Le **linee di corrente** sono curve \mathbf{S} tangenti al campo vettoriale $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ in ogni punto dello spazio \mathbf{r} , all'istante temporale t considerato. Essendo curve (dimensione=1), possono essere espresse in forma parametrica come funzioni di un parametro scalare p , $\mathbf{S}(p)$. La «traduzione matematica» della definizione è quindi

$$\frac{d\mathbf{S}}{dp}(p) = \lambda(p)\mathbf{u}(\mathbf{S}(p), t),$$

cioè il vettore tangente $d\mathbf{S}(p)/dp$ alla curva $\mathbf{S}(p)$, nel punto identificato dal valore del parametro p , è parallelo al vettore velocità \mathbf{u} calcolato nello stesso punto $\mathbf{S}(p)$, al tempo considerato t . La funzione $\lambda(p)$ dipende dalla parametrizzazione utilizzata e non influisce sulla forma della linea di corrente. L'equazione ($\text{ref} \Rightarrow \text{eqn:cinematica:ldc}$) rappresenta tutte le linee di corrente: per ottenere la linea di corrente passante per un punto, è necessario imporre questa condizione come condizione al contorno.

- Una **traiettoria** descrive il moto di una singola particella materiale, la cui velocità è uguale a quella del fluido, nella posizione in cui si trova e all'istante di tempo «attuale». La traiettoria di una particella è descritta dall curva $\mathbf{R}(t)$, parametrizzata con il tempo t , che soddisfa il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{R}}{dt}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{R}(t), t) \\ \mathbf{R}(t_0) = \mathbf{R}_0 . \end{cases}$$

L'equazione differenziale traduce la definizione di particella materiale: la velocità della particella materiale $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{R}/dt(t)$ è uguale alla velocità del fluido nello stesso punto allo stesso istante di tempo, $\mathbf{u}(\mathbf{R}(t), t)$. La condizione iniziale identifica tra tutte le traiettorie delle infinite particelle materiali, quella della particella che all'istante t_0 passa per il punto \mathbf{R}_0 . Fissati i «parametri» t_0 e \mathbf{R}_0 che identificano la particella desiderata, la sua traiettoria è descritta dalla curva $\mathbf{R}(t; t_0, \mathbf{R}_0)$, funzione del tempo «attuale» t .

- Una **linea di fumo** è il luogo dei punti descritto dalla posizione al tempo t (fissato) di tutte le particelle materiali passate per un punto (fissato) nello spazio, \mathbf{R}_0 , negli istanti di tempo t_0 precedenti a t , $t_0 < t$.

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{R}}{dt}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{R}(t), t) \\ \mathbf{R}(t_0) = \mathbf{R}_0 . \end{cases}$$

Il problema è identico a quello delle traiettorie. Cambia però il ruolo di t, t_0, \mathbf{R}_0 : la linea di fumo al «tempo di osservazione» t formata da tutte le particelle passanti da \mathbf{R}_0 a istanti temporali t_0 , con $t_0 < t$, è una descritta dalla curva $\mathbf{R}(t_0; t, \mathbf{R}_0)$, funzione dell'istante t_0 .

- Una **traccia** è il luogo dei punti descritto dalla posizione al tempo t (fissato) di tutte le particelle materiali che si trovano su una curva $\mathbf{R}_0(p)$ al tempo t_0 (fissato).

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{R}}{dt}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{R}(t), t) \\ \mathbf{R}(t_0) = \mathbf{R}_0 . \end{cases}$$

Ancora una volta il problema è identico a quello delle traiettorie ma cambia il ruolo di t, t_0, \mathbf{R}_0 : fissati i parametri t_0 e t che identificano rispettivamente l'istante di tempo in cui le particelle materiali desiderate si trovano sulla curva \mathbf{R}_0 e l'istante di tempo in cui la curva viene osservata, la traccia è una funzione dell luogo dei punti «iniziale» \mathbf{R}_0 , $\mathbf{R}(\mathbf{R}_0; t, t_0)$.

3.4.1 Osservazione 1.

Nel caso di campi stazionari, cioè indipendenti dal tempo, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}^{(staz)}(\mathbf{r})$, linee di corrente, traiettorie e linee di fumo coincidono.

3.5 Exercises

Exercise 3.1 Sia dato il campo di moto

$$\mathbf{u}(x, y) = 3x\hat{\mathbf{x}} + 3t\hat{\mathbf{y}}$$

Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle. Infine si determino le tracce generate al tempo $t_0 = 0$ dal segmento che unisce l'origine con il punto $(x_1, y_1) = (0, 1)$.

Exercise 3.2 Sia dato il campo di moto

$$\mathbf{u}(x, y) = 2Ax\hat{\mathbf{x}} - 2Ay\hat{\mathbf{y}}$$

Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle.

Exercise 3.3 Sia dato il campo di moto

$$\mathbf{u}(x, y, z) = 3y\hat{\mathbf{x}} - 3x\hat{\mathbf{y}} + t\hat{\mathbf{z}}$$

Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle.

Exercise 3.4 Sia dato il campo di moto

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}\hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}\hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}\hat{\mathbf{z}}$$

Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle.

3.5.1 Exercise 3.1

Exercise 3.1 Sia dato il campo di moto

$$\mathbf{u}(x, y) = 3x\hat{\mathbf{x}} + 3t\hat{\mathbf{y}}$$

Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle. Infine si determinino le tracce generate al tempo $t_0 = 0$ dal segmento che unisce l'origine con il punto $(x_1, y_1) = (0, 1)$.

Concetti. Definizione di linee di corrente, traiettorie, linee di fumo, tracce. Soluzione di sistemi di equazioni differenziali ordinarie (problemi di Cauchy, ai valori iniziali).

Svolgimento. Partendo dalle definizioni, si ricavano le equazioni delle curve caratteristiche. Il problema per le traiettorie, le linee di fumo e le tracce viene risolto una volta sola per ottenere il risultato in forma parametrica in funzione di $t, t_0, R_0(p) = (x_0(p), y_0(p))$.

- **Linee di corrente.** L'equazione vettoriale che definisce una linea di corrente $S(p) = X(p)\hat{\mathbf{x}} + Y(p)\hat{\mathbf{y}}$ viene scritta per componenti, $\begin{cases} \frac{dX}{dp}(p) = \lambda(p) \\ \frac{dY}{dp}(p) = \lambda(p) t \end{cases}$

ricavando dalla prima $\lambda(p)$ in funzione di dX/dp , sostituendolo nella seconda, e integrando tra p_0 e p , con t fissato $\int_{p_0}^p \frac{dY}{dp}(p') dp' = \int_{p_0}^p \frac{dX}{dp}(p') t dp' \rightarrow Y(p) - Y(p_0) = (X(p) - X(p_0)) t$. Dopo aver fissato una linea di corrente, imponendo il suo passaggio per un punto, $(X(p_0), Y(p_0)) = (x_0, y_0)$, si ottiene la sua equazione in forma cartesiana $y = y_0 + (x - x_0)t$. In questo problema, le linee di corrente costituiscono una famiglia di rette parallele nel piano $x-y$, a ogni istante temporale aumenta con il tempo.

- **Traiettorie.** Le equazioni di traiettorie, linee di fumo e tracce vengono ricavate in forma parametrica risolvendo il problema ai valori iniziali che le definisce. In un secondo momento viene ricavata la loro equazione in forma cartesiana, esplicitando il parametro in funzione di una delle due coordinate spaziali, esplicitando il parametro in funzione di una delle due coordinate spaziali. Per le traiettorie, parametrizzate con t , si ottiene $\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = 3 \\ \frac{dy}{dt}(t) = 3t \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} x(t; R_0, t_0) = x_0 + 3(t - t_0) \\ y(t; R_0, t_0) = y_0 + \frac{3}{2}(t^2 - t_0^2) \end{cases}$ Esplicitando t in funzione di x, t_0 e sostituendo nella coordinata y si ottiene l'equazione in forma cartesiana, $y(x; R_0, t_0) = \frac{1}{6}x^2 + \left[-\frac{1}{3}x_0 + t_0\right]x + y_0 + \frac{1}{6}x_0^2 - x_0t_0$, all'interno della quale $\mathbf{R}_0 = (x_0, y_0)$ e t_0 compaiono ancora come parametri. Dalla ([eqn:ese:tra] reference-type=>ref reference=>eqn:ese:tra), le traiettorie sono parabole con la concavità rivolta verso l'alto.

- **Linee di fumo (curve di emissione).** La forma parametrica dell'equazione delle linee di fumo (funzioni di t_0) è

$$\begin{cases} x(t_0; t, R_0) = x_0 + 3(t - t_0) \\ y(t_0; t, R_0) = y_0 + \frac{3}{2}(t^2 - t_0^2) \end{cases} \quad \$$$

Esplicitando t_0 in funzione di x , $t_0 = t - \frac{x - x_0}{3}$, e sostituendo nella coordinata y si ottiene l'equazione in forma cartesiana, $y = -\frac{1}{6}x^2 + \left[\frac{1}{3}x_0 + t\right]x + y_0 - \frac{1}{6}x_0^2 + x_0t_0$, all'interno della quale $\mathbf{R}_0 = (x_0, y_0)$ et compaiono ancora come parametri. Dalla (eqn:ese:tra1) (reference-type=»ref» reference=»eqn:ese:tra1»), le linee di fumo sono parabole con la concavità rivolta verso il basso.

- **Tracce.** La forma parametrica dell'equazione delle tracce è $\begin{cases} x(R_0; t, t_0) = x_0 + 3(t - t_0) \\ y(R_0; t, t_0) = y_0 + \frac{3}{2}(t^2 - t_0^2) \end{cases} \quad \$$

Il segmento che unisce l'origine al punto $(x_1, y_1) = (0, 1)$ è descritto in forma parametrica come $R_0(p) = \begin{cases} x_0(p) = 0 \\ y_0(p) = p \end{cases}, p \in [0, 1]$. La forma parametrica delle tracce (il parametro p descrive la curva, mentre t, t_0 sono parametri fissi) quindi $R(R_0(p), t, t_0) = \begin{cases} x(p; t, t_0) = 3(t - t_0) \\ y(p; t, t_0) = p + \frac{3}{2}(t^2 - t_0^2) \end{cases}, p \in [0, 1]$. Queste sono segmenti verticali di lunghezza uguale a 1, con il punto p basso di t_0 , $\frac{3}{2}(t^2 - t_0^2)$).

3.5.2 Exercise 3.2

Exercise 3.2 Sia dato il campo di moto

$$\mathbf{u}(x, y) = 2Ax\hat{\mathbf{x}} - 2Ay\hat{\mathbf{y}}$$

Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle.

Concetti. Definizione di linee di corrente, traiettorie, linee di fumo, tracce. Soluzione di sistemi di equazioni differenziali ordinarie (problemi di Cauchy, ai valori iniziali).

Svolgimento. Partendo dalle definizioni, si ricavano le equazioni delle curve caratteristiche.

- **Linee di corrente.** Dalla scrittura in componenti della definizione di linee di corrente si ottiene il sistema
$$\begin{cases} \lambda \frac{dX}{dp} = 2AX \\ \lambda \frac{dY}{dp} = -2AY \end{cases}$$

$\lambda(p) = \frac{X'(p)}{2AX(p)}$ dalla prima equazione e inserendolo nella seconda. Integrando tra p_0 e p , dopo aver semplificato i fattori $2A$, si ottiene (derivare per credere)

$$0 = \int_{p_0}^p \left(\frac{X'(p')}{X(p')} + \frac{Y'(p')}{Y(p')} \right) dp' = \ln \frac{X(p)}{X(p_0)} + \ln \frac{Y(p)}{Y(p_0)} \rightarrow X(p)Y(p) = X(p_0)Y(p_0)$$

Le linee di corrente appaiono come iperbole equilatera con gli assi X e Y coincidenti. Nel processo di integrazione si assume che X e Y siano diversi da zero. Nella ricerca degli equilibri del sistema, si nota che

- il punto $(x, y) = (0, 0)$ è l'unico punto di equilibrio del sistema, punto di ristagno del campo di velocità;
- gli assi coordinati coincidono con linee di corrente: la derivata dX/dp è nulla quando $X = 0$ (se la parametrizzazione della curva è regolare, cioè $\lambda(p) \neq 0$); la derivata dY/dp è nulla quando $Y = 0$ (se la parametrizzazione della curva è regolare, cioè $\lambda(p) \neq 0$). Nel primo caso, la linea di corrente coincide con l'asse y , avendo coordinata $X = 0$ costante e coordinata $Y(p)$ descritta dalla seconda equazione; nel secondo caso, la linea di corrente coincide con l'asse x , avendo coordinata $Y = 0$ costante e coordinata $X(p)$ descritta dalla prima equazione.

• **Traiettorie.**
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2Ax(t) \\ \frac{dy}{dt} = -2Ay(t) \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t; r_0, t_0) = x_0 e^{2A(t-t_0)} \\ y(t; r_0, t_0) = y_0 e^{-2A(t-t_0)} \end{cases} \quad \$$$

• **Linee di fumo.** Da quanto riportato nel punto e nell'osservazione precedenti, è immediato ricavare sia la forma parametrica delle linee di fumo,
$$\begin{cases} x(t_0; t, r_0) = x_0 e^{2A(t-t_0)} \\ y(t_0; t, r_0) = y_0 e^{-2A(t-t_0)} \end{cases} \quad \text{siala formacartesiana, } x y = x_0 y_0 \$.$$

Osservazione.

Per ricavare la forma cartesiana dell'equazione delle traiettorie bisogna esplicitare il parametro t in funzione di una delle due coordinate e inserire la formula ottenuta nell'equazione delle altre componenti. In questo caso è possibile eliminare la dipendenza da t , moltiplicando tra di loro le componenti delle traiettorie e ottenendo $xy = x_0 y_0$: si osserva l'equazione delle traiettorie coincide con l'equazione delle linee di corrente per il campo di velocità considerato. Le linee di corrente coincidono con le linee di corrente e le linee di fumo nel caso in cui il **campo di velocità** è **stazionario**: in questo caso, il sistema differenziale con il quale si ricavano linee di corrente e linee di fumo è **autonomo**, cioè il termine forzante non dipende esplicitamente dal tempo. La soluzione di un problema differenziale di un sistema autonomo non dipende dal tempo t in sè, ma dalla differenza tra il tempo t e il tempo al quale viene imposta la condizione iniziale t_0 : nella formula parametrica delle traiettorie, t e t_0 compaiono sempre come differenza $t - t_0$ e mai «in altre forme», come ad esempio nell'esercizio precedente, nel quale il campo di moto non è stazionario. Per questo motivo si arriva alla stessa equazione in forma cartesiana per le traiettorie e le linee di fumo, dopo aver esplicitato rispettivamente t e t_0 in funzione di una coordinata e aver inserito questa espressione nelle formule delle altre componenti.

3.5.3 Exercise 3.3

Exercise 3.3 Sia dato il campo di moto

$$\mathbf{u}(x, y, z) = 3y\hat{\mathbf{x}} - 3x\hat{\mathbf{y}} + t\hat{\mathbf{z}}$$

Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle.

Suggerimento. Le componenti x e y del sistema sono accoppiate tra di loro.

Risolvendo il sistema per le **linee di corrente**,
$$\begin{cases} \frac{dX}{dp} = \lambda(p)3Y \\ \frac{dY}{dp} = -\lambda(p)3X \\ \frac{dZ}{dp} = \lambda(p)t, \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} X(p) \frac{dX}{dp} + Y(p) \frac{dY}{dp} = 0 \\ \frac{dZ}{dp} = \lambda(p)t. \end{cases} \quad \text{Integrandola prima, si ottiene l'equazione di una circonferenza } X(p)^2 + Y(p)^2$$

$$= R^2 (\text{con } R^2 = X(p_0)^2 + Y(p_0)^2, \text{ descrivibile in forma parametrica come } \begin{cases} X(p) = R \cos(p) \\ Y(p) = R \sin(p). \end{cases} \quad \text{Con la parametrizzazione}$$

$= -1/3e$ integrare l'equazione per la componente Z .

Per il calcolo dell'equazione che descrive le **triettorie** delle particelle materiali e le **linee di fumo**, la soluzione del proble-

ma di Cauchy \$ \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 3y(t) \quad x(t_0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = -3x(t) \quad y(t_0) = y_0 \\ \frac{dz}{dt} = t \quad z(t_0) = z_0, \end{array} \right. \text{halaforma} \left\{ \begin{array}{l} x(t, r_0, t_0) = A \sin(3t) - B \cos(3t) \\ y(t, r_0, t_0) = A \cos(3t) + B \sin(3t) \\ z(t, r_0, t_0) = z_0 + \frac{t^2 - t_0^2}{2}. \end{array} \right. \text{ Lecostantidiintegrazionemanca}

$y_0 \cos(3t_0) + x_0 \sin(3t_0)$, $B = y_0 \sin(3t_0) - x_0 \cos(3t_0)$,elasoluzionedelproblemainformaparametricapuesseriscrittacom

3.5.4 Exercise 3.4

Exercise 3.4 Sia dato il campo di moto

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \hat{\mathbf{z}}$$

Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle.

Suggerimento. Per risolvere l'esercizio in maniera semplice, si osservi che il campo di moto è stazionario e ha simmetria sferica: è quindi conveniente usare un sistema di coordiante sferiche.

Balance equations

In questo capitolo vengono introdotti i bilanci di alcune quantità meccaniche per un mezzo continuo. I bilanci in forma integrale permettono di descrivere l'evoluzione complessiva (integrale) di un sistema e vengono ricavati partendo da alcuni principi fondamentali della meccanica classica: la conservazione della massa, le equazioni cardinali della dinamica, il primo principio della termodinamica o bilancio dell'energia. Vengono scritti prima per un volume materiale e poi per volumi di controllo o volumi in moto generico, utilizzando il teorema del trasporto di Reynolds.

Dai bilanci in forma integrale, sotto ipotesi di sufficiente regolarità dei campi, vengono poi ricavati i bilanci in forma differenziale, che permettono di descrivere l'evoluzione locale (puntuale) di un sistema. La forma lagrangiana dei bilanci di massa, di quantità di moto e della vorticità verrà utilizzata per meglio apprezzare il significato del vincolo di incomprimibilità, il ruolo della pressione (e degli sforzi in generale) nella dinamica di un fluido e intuire l'influenza del campo di velocità sul campo di vorticità.

Successivamente, dai bilanci integrali vengono ricavate le relazioni di salto delle quantità meccaniche. Queste relazioni possono essere utilizzate per trovare determinare lo stato di un sistema formato da due sotto-sistemi, all'interno dei quali i campi sono regolari, ma che sono separati da una frontiera, attraverso la quale i campi non sono regolari: alcuni esempi di queste sono le superfici «di scorrimento» in fluidi non viscosi, attraverso le quali è discontinua la componente tangenziale della velocità, o le onde d'urto che possono formarsi in correnti comprimibili di fluidi non viscosi.

Infine, viene fornita una breve introduzione agli esercizi sui bilanci integrali, che costituisce una prima linea guida al loro svolgimento.

4.1 Bilanci in forma integrale

Vengono ricavati i bilanci integrali per un volume materiale $V(t)$ partendo dai principi fondamentali della meccanica classica. Successivamente si ricavano i bilanci per un volumi in moto arbitrario $v(t)$ e, come caso particolare, volumi di controllo V_c .

4.2 Bilancio di massa

La massa di un volume materiale è uguale all'integrale sul volume della densità ρ . Per il **principio di conservazione della massa**, la massa di un sistema chiuso (che non ha scambi di materia con l'esterno), come ad esempio un volume materiale $V(t)$, rimane costante e quindi la sua derivata nel tempo deve essere uguale a zero,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho = 0.$$

4.3 Bilancio della quantità di moto

La quantità di moto di un volume materiale è uguale all'integrale sul volume della quantità di moto per unità di volume $\rho \mathbf{u}$, dove \mathbf{u} è la velocità delle particelle materiali. Per la **prima equazione cardinale della dinamica**, la derivata nel tempo della quantità di moto di un sistema è uguale alla risultante delle forze esterne agenti sul sistema,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} = \int_{V(t)} \mathbf{f} + \oint_{S(t)} \mathbf{t}_n,$$

dove $\int_{V(t)} \mathbf{f}$ rappresenta la risultante delle forze esterne di volume e $\oint_{S(t)} \mathbf{t}_n$ la risultante delle forze esterne di superficie, avendo indicato con \mathbf{f} il campo di forze per unità di volume e \mathbf{t}_n il vettore sforzo agente sulla superficie esterna $S(t)$ del volume $V(t)$. Il teorema di Cauchy nella meccanica del continuo, permette di esprimere il vettore sforzo \mathbf{t}_n in funzione del tensore degli sforzi \mathbb{T} e la normale alla superficie $\hat{\mathbf{n}}$, come $\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T}$.

4.4 Bilancio del momento quantità di moto

Il momento della quantità di moto di un volume materiale è uguale all'integrale sul volume del momento della quantità di moto per unità di volume $\rho \mathbf{r} \times \mathbf{u}$, dove \mathbf{r} è il vettore che congiunge il polo con i punti del volume materiale. Per la **seconda equazione cardinale della dinamica**, la derivata nel tempo del momento della quantità di moto di un sistema, rispetto a un polo fisso, è uguale alla risultante momenti esterni sul sistema,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} = \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \oint_{S(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n,$$

nell'ipotesi che non ci siano momenti esterni per unità di volume e che il materiale non sia polare (due elementi di materiale adiacenti non si scambiano momenti ma solo forze).

4.5 Bilancio dell'energia totale

L'energia totale di un volume materiale è uguale all'integrale sul volume della sua energia interna per unità di volume ρe e della sua energia cinetica per unità di volume $\rho |\mathbf{u}|^2/2$. Combinando il **primo principio della termodinamica** (che riguarda solo sistemi in equilibrio) con il **teorema dell'energia cinetica** (che non include il contributo di energia interna), la derivata nel tempo dell'energia totale del sistema di un sistema è uguale alla differenza tra la potenza delle forze agenti sul sistema e i flussi di calore uscenti da esso,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e^t = \int_{V(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{S(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{S(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{V(t)} \rho r,$$

avendo indicato con \mathbf{q} il flusso di calore uscente dal volume materiale $V(t)$, e con r l'intensità di una sorgente di calore per unità di massa, distribuita all'interno del volume $V(t)$, come ad esempio il calore rilasciato da una reazione chimica come la combustione.

4.6 Bilanci integrali per volumi in moto arbitrario

Utilizzando il teorema del trasporto di Reynolds, è possibile esprimere la derivata nel tempo dell'integrale di un campo f su un volume materiale $V(t)$ come somma della derivata nel tempo dell'integrale dello stesso campo f su un volume arbitrario $v(t)$ e al flusso della quantità f attraverso la frontiera $s(t) = \partial v(t)$ di $v(t)$, dovuto alla velocità relativa $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ tra le particelle materiali e la superficie $s(t)$,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f = \frac{d}{dt} \int_{v(t) \equiv V(t)} f + \oint_{s(t) \equiv S(t)} f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

I bilanci integrali riferiti a un volume arbitrario $v(t)$, la cui superficie $s(t)$ si muove con velocità \mathbf{v} , risultano

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho + \oint_{s(t)} \rho(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \mathbf{u} + \oint_{s(t)} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v(t)} \mathbf{f} + \oint_{s(t)} \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} + \oint_{s(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \oint_{s(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t + \oint_{s(t)} \rho e^t(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{s(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{V(t)} \rho r. \end{array} \right.$$

4.7 Bilanci integrali per volumi di controllo fissi

Come caso particolare dei bilanci integrali riferiti a un volume arbitrario $v(t)$, i bilanci integrali riferiti a un volume di controllo fisso V_c risultano

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho + \oint_{S_c} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \mathbf{u} + \oint_{S_c} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V_c} \mathbf{f} + \oint_{S_c} \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} + \oint_{S_c} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V_c} \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \oint_{S_c} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho e^t + \oint_{S_c} \rho e^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V_c} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{S_c} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{S_c} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{V(t)} \rho r. \end{array} \right.$$

4.8 Bilanci in forma differenziale

Sotto le ipotesi di sufficiente regolarità dei campi che compaiono negli integrali di superficie, è possibile trasformare gli integrali di superficie in integrali di volume, applicando il teorema della divergenza o il lemma del teorema di Green

$$\oint_S f n_i = \int_V f_{/i},$$

avendo indicato con $f_{/i}$ la derivata parziale rispetto alla coordinata cartesiana x_i e con n_i la proiezione lungo x_i della normale uscente dalla superficie $S = \partial V$. Una volta scritti tutti i termini come integrali di volume, sullo stesso volume V , è possibile sfruttare l'arbitrarietà del volume V per ricavare i bilanci in forma differenziale. In questa sezione, si partirà dai bilanci in forma integrale scritti per un volume di controllo fisso $V = V_c$, per il quale vale

$$\frac{d}{dt} \int_V f = \int_V \frac{\partial f}{\partial t},$$

secondo il teorema del trasporto di Reynolds.

4.9 Bilancio di massa

Usando il teorema del trasporto di Reynolds per volumi di controllo fissi e applicando il teorema della divergenza al termine di flusso, si può scrivere

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho + \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] = 0.$$

Sfruttando l'arbitrarietà del bilancio integrale dal volume considerato e imponendo che l'integranda sia nulla, si ricava la *forma conservativa* del bilancio differenziale di massa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

Sviluppando la divergenza $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho$, e riconoscendo l'espressione della derivata materiale, si ottiene la *forma convettiva* del bilancio differenziale di massa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Il vincolo cinematico di incomprimibilità $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ equivale al vincolo «fisico» che impone che la densità delle singole particelle materiali rimanga costante, $D\rho/Dt = 0$.

4.10 Bilancio di quantità di moto

È possibile trasformare in un integrale di volume la risultante degli sforzi di superficie, utilizzando il teorema di Cauchy per i mezzi continui,

$$\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T}, \quad t_i = n_j T_{ji},$$

dove \mathbf{t}_n è il vettore sforzo, $\hat{\mathbf{n}}$ la normale alla superficie e \mathbb{T} il tensore degli sforzi. La risultante degli sforzi di superficie diventa, usando un po' di libertà nel passare dalla notazione astratta a quella indiciale,

$$\oint_S \mathbf{t}_n = \oint_S t_i = \oint_S n_j T_{ji} = \int_V T_{ji/j} = \int_V \nabla \cdot \mathbb{T}.$$

Usando il teorema del trasporto di Reynolds per volumi di controllo fissi e applicando il teorema della divergenza al termine di flusso,

$$\oint_S \{\rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}\}_i = \oint_S \rho u_i u_j n_j = \int_V (\rho u_i u_j)_{/j} = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}),$$

si può scrivere il bilancio di quantità di moto

$$\int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \int_V [\mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbb{T}].$$

Sfruttando l'arbitrarietà del bilancio integrale dal volume considerato e imponendo che l'integranda sia nulla, si ricava la *forma conservativa* del bilancio differenziale di quantità di moto,

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbb{T}) = \mathbf{f}.$$

Sviluppando i termini

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} = \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad , \quad (\rho u_i u_j)_{/j} = \rho u_j u_{i/j} + u_i (\rho u_j)_{/j} \quad ,$$

riconoscendo che $\mathbf{u} \cdot (\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})) = 0$ come conseguenza della conservazione della massa, si ottiene la *forma convettiva* dell'equazione della quantità di moto

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbb{T}$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbb{T} \quad .$$

4.11 Bilancio del momento della quantità di moto

Il bilancio del momento della quantità di moto per un mezzo continuo non polare è equivalente alla condizione di simmetria del tensore degli sforzi $\mathbb{T}^T = \mathbb{T}$, $T_{ij} = T_{ji}$.

4.12 Bilancio dell'energia totale

Usando un po' di libertà nel passare dalla notazione astratta a quella indiciale, la potenza degli sforzi di superficie diventa

$$\oint_S \mathbf{t}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} = \oint_S t_i u_i = \oint_S n_j T_{ji} u_i = \int_V (T_{ji} u_i)_{/j} = \int_V \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u})$$

$$= \int_V (T_{ij/j} u_i + T_{ij} u_{j/i}) = \int_V ((\nabla \cdot \mathbb{T}) \cdot \mathbf{u} + \mathbb{T} : \nabla \mathbf{u}) \quad ,$$

avendo utilizzato la simmetria del tensore degli sforzi, $T_{ij/j} = \{\nabla \cdot \mathbb{T}^T\}_i = \{\nabla \cdot \mathbb{T}\}_i$. Applicando il teorema della divergenza, il termine di flusso di calore

viene scritto come

$$\oint_S \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} \quad .$$

La *forma conservativa* del bilancio differenziale di energia totale diventa quindi

$$\frac{\partial(\rho e^t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e^t \mathbf{u} - \mathbb{T} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{q}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \rho r \quad .$$

Sviluppando la derivata temporale e il termine $\nabla \cdot (\rho e^t \mathbf{u}) = \rho \mathbf{u} \cdot \nabla e^t + e^t \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})$, riconoscendo che $e^t (\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})) = 0$ come conseguenza della conservazione della massa, si ottiene la *forma convettiva* dell'equazione dell'energia totale,

$$\rho \frac{\partial e^t}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla e^t = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r$$

$$\rho \frac{De^t}{Dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \quad .$$

4.13 Chiusura del problema

Affinché il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali formato dai bilanci di massa, quantità di moto ed energia totale, con le condizioni iniziali e al contorno adeguate, sono necessarie l'equazione di stato del materiale che ne descriva le proprietà termodinamiche¹ e i legami costitutivi che esprimano il tensore degli sforzi e il flusso di calore come funzioni dello stato dinamico e termodinamico del sistema. Per un fluido, il tensore degli sforzi viscosi \mathbb{T} può essere scritto come la somma del contributo idrostatico dovuto alla pressione p e il tensore degli sforzi viscosi \mathbb{S} , funzione delle derivate spaziali del campo di velocità. Un fluido che ha un *legame costitutivo lineare* tra il tensore degli sforzi viscosi e il gradiente di velocità $\nabla \mathbf{u}$, viene definito **fluido newtoniano**. Per un fluido newtoniano isotropo, il legame costitutivo che definisce il tensore degli sforzi è

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbb{I},$$

dove μ e λ sono rispettivamente il coefficiente di viscosità dinamica e il secondo coefficiente di viscosità, p è la pressione («termodinamica»), \mathbb{D} il tensore velocità di deformazione. In generale, sia la pressione p sia i coefficienti di viscosità dipendono dallo stato termodinamico del sistema. Il flusso di calore \mathbf{q} per conduzione può essere descritto dalla **legge di Fourier**, che lo mette in relazione con il gradiente della temperatura tramite il coefficiente di conduzione termica k , in generale funzione dello stato termodinamico del sistema,

$$\mathbf{q} = -k\nabla T.$$

L'introduzione di queste leggi costitutive nelle equazioni di bilancio, aggiunge nuove incognite al sistema, per le quali non abbiamo ricavato un'equazione dinamica. Sono quindi indispensabili la legge di stato che fornisca le relazioni necessarie,

$$\begin{aligned} p &= p(\rho, e) & \mu &= \mu(\rho, e) \\ T &= T(\rho, e) & \lambda &= \lambda(\rho, e) \\ & & k &= k(\rho, e), \end{aligned}$$

avendo scelto le variabili termodinamiche delle quali è nota l'equazione dinamica come due variabili termodinamiche indipendenti: la densità ρ e l'energia interna e . Ve

4.14 Altre equazioni di bilancio

Combinando i bilanci delle quantità meccaniche ottenuti partendo dai principi fondamentali della fisica, si possono ottenere le equazioni di bilanci di altre quantità, come ad esempio l'energia cinetica $\rho|\mathbf{u}|^2/2$, l'energia interna e , e la vorticità $\mathbb{Q} = \nabla \times \mathbf{u}$.

4.14.1 Equazione dell'energia cinetica

Moltiplicando scalarmente il bilancio della quantità di moto per il vettore velocità \mathbf{u} , si può scrivere l'equazione di bilancio dell'energia cinetica. In forma conservativa,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho|\mathbf{u}|^2}{2} + \nabla \cdot \left(\rho\mathbf{u} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T}),$$

in forma convettiva,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \rho\mathbf{u} \cdot \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T}) \\ \rho \frac{D}{Dt} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T}). \end{aligned}$$

¹ Si ricorda che lo stato termodinamico di un sistema monofase è definito da due variabili termodinamiche indipendenti.

4.14.2 Equazione dell'energia interna

Dalla differenza del bilancio dell'energia totale e dell'energia cinetica, si ottiene il bilancio dell'energia interna. In forma conservativa,

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u}) = \mathbb{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r,$$

in forma convettiva,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla e &= \mathbb{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \\ \rho \frac{De}{Dt} &= \mathbb{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r. \end{aligned}$$

4.14.3 Equazione della vorticità

Applicando l'operatore di rotore al bilancio della quantità di moto, si ottiene l'equazione dinamica della vorticità. Per un fluido newtoniano (con coefficienti di viscosità costanti e uniformi),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \\ \frac{D \boldsymbol{\omega}}{Dt} &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2}, \end{aligned}$$

dove è stata introdotta la viscosità cinematica del fluido, $\nu = \mu/\rho$.

4.14.4 Equazione dell'entropia

Nell'ipotesi di equilibrio termodinamico delle singole particelle materiali² si può ricavare dal primo principio della termodinamica, $\$de = Tds - Pdv = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho$, l'equazione di bilancio dell'entropia in forma convettiva,

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \quad \rightarrow \quad \rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} \left(\rho \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \right).$$

Utilizzando il bilancio dell'energia interna e il bilancio di massa, si può scrivere

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} (\mathbb{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r + p \nabla \cdot \mathbf{u}),$$

e separando i contributi viscosi da quelli di pressione nel tensore degli sforzi, $\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{S}$,³

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} (\mathbb{S} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r).$$

Nel caso di fluidi newtoniani, $\mathbb{S} = 2\mu\mathbb{D} + \lambda\nabla \cdot \mathbf{u}\mathbb{I}$, l'equazione dell'entropia in forma differenziale convettiva diventa

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} (2\mu\mathbb{D} : \mathbb{D} + \lambda|\nabla \cdot \mathbf{u}|^2 - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r).$$

Utilizzando la legge di Fourier, $\mathbf{q} = -k\nabla T$, per il flusso di calore per conduzione, si può riscrivere il termine di divergenza del flusso di calore,

$$\frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T^2} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - k \nabla T \cdot \frac{\nabla T}{T^2} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - k \frac{|\nabla T|^2}{T^2},$$

² Se i tempi caratteristici della termodinamica sono di gran lunga inferiori al tempo caratteristico del fenomeno fluidodinamico, si può immaginare che la singola particella fluida sia in continuo stato di equilibrio termodinamico locale. Si possono quindi estendere i risultati della Termodinamica, che in generale studia sistemi in equilibrio, alla singola particella fluida.

³ Dovrebbe essere facile dimostrare che $\mathbb{I} : \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}$.

e quindi riscrivere l'equazione dell'entropia, in forma conservativa e convettiva,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{u}) &= \frac{1}{T} (2\mu \mathbb{D} : \mathbb{D} + \lambda |\nabla \cdot \mathbf{u}|^2) + k \frac{|\nabla T|^2}{T^2} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \frac{\rho r}{T} \\ \rho \frac{Ds}{Dt} &= \frac{1}{T} (2\mu \mathbb{D} : \mathbb{D} + \lambda |\nabla \cdot \mathbf{u}|^2) + k \frac{|\nabla T|^2}{T^2} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \frac{\rho r}{T} . \end{aligned}$$

In questa equazione si riconoscono tutti i fenomeni fisici che influenzano l'entropia di una particella materiale. Si possono distinguere i contributi dovuti alla *non idealità* del fluido considerato, legati ai fenomeni viscosi e di conduzione del calore, e i contributi dovuti ai flussi di calore forniti alla sistema. I fenomeni viscosi e i processi di conduzione del calore fanno aumentare l'entropia, poiché

$$T, \mu, \lambda, k \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathbb{D} : \mathbb{D}, |\nabla \cdot \mathbf{u}|, |\nabla T| \geq 0 .$$

Gli ultimi due termini rappresentano i flussi di calore forniti al sistema e si presentano nella forma Q/T , flusso di calore diviso la temperatura della particella, coerentemente con la definizione dell'entropia in Termodinamica,

$$dS = \frac{\delta Q}{T} .$$

Questi due termini possono dare un contributo positivo o negativo, a seconda del segno della sorgente di calore r e del flusso di valore \mathbf{q} . Il bilancio dell'entropia in forma integrale per un volume materiale,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho s = \int_{V(t)} \frac{1}{T} \left(2\mu \mathbb{D} : \mathbb{D} + \lambda |\nabla \cdot \mathbf{u}|^2 + k \frac{|\nabla T|^2}{T} \right) - \oint_{\partial V(t)} \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{V(t)} \frac{\rho r}{T} ,$$

permette di interpretare il ruolo dei fenomeni non ideali (viscosità e conduzione del calore) come sorgente di volume sempre positiva dell'entropia, riconoscere il ruolo della sorgente (o pozzo) di entropia di intensità per unità di massa r/T svolto da una sorgente di calore per unità di massa r , e il ruolo di flusso di entropia \mathbf{q}/T attraverso il contorno del volume $V(t)$ svolto da un flusso di calore \mathbf{q} .

4.15 Relazioni di salto

...

4.16 Approfondimenti su alcuni bilanci

In questa sezione vengono analizzate alcune equazioni di bilancio in forma differenziale (è quindi necessario che queste equazioni siano valide!); vengono usate sia la rappresentazione euleriana sia la rappresentazione lagrangiana, al fine di ottenere la migliore comprensione dei fenomeni fisici coinvolti.

Si indicano con \mathbf{x}_0 le coordinate lagrangiane, solidali con il continuo; si indicano con \mathbf{x} le coordinate euleriane. I due sistemi di coordinate sono legati tra di loro dalle relazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) \\ \frac{D\mathbf{x}}{Dt} &= \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{u} \end{aligned}$$

La derivata $\partial/\partial t$ indica la derivata temporale fatta a coordinata euleriana \mathbf{x} costante. La derivata materiale D/Dt indica la derivata fatta «a coordinata lagrangiana» costante e rappresenta quindi la variazione temporale di una quantità legata alla particella materiale, che si muove come il continuo, per la definizione di coordinate materiali.

Il legame tra D/Dt e $\partial/\partial t$ si trova utilizzando le regole di derivazione per funzioni composte. Scrivendo la funzione generica f come

$$f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t) = f_0(\mathbf{x}_0, t) = f_0(\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t), t),$$

si ottiene

$$\frac{D}{Dt}f = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t) = \frac{\partial f}{\partial t}\bigg|_{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\bigg|_{\mathbf{x}_0} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f.$$

4.16.1 Continuità

L'equazione di continuità può essere riscritta mettendo in evidenza la derivata materiale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}$$

È possibile dimostrare¹ la relazione $DJ/Dt = J \nabla \cdot \mathbf{u}$, dove J indica il determinante del gradiente $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{x}_0$, si può scrivere l'equazione in coordinate lagrangiane, dopo averla moltiplicata per J ($\neq 0$)

$$J \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{DJ}{Dt} \Rightarrow \frac{D(J\rho)}{Dt} = 0 \Rightarrow J\rho = \rho_0$$

La variazione della densità di una particella materiale è legata alla variazione del volume della stessa (ricordare che $dv = JdV$). Questa conclusione è ragionevole se si pensa che la massa della particella materiale si conserva ($dm = \rho dv = \rho_0 dV$).

Il vincolo di incomprimibilità rappresenta la costanza del volume della particella materiale. Il volume dv coincide con il volume di riferimento dV , implicando $J \equiv 1$ e quindi $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

4.16.2 Quantità di moto

L'equazione della quantità di moto è

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right\} = \nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f}$$

dove con \mathbb{T} è stato indicato il tensore degli sforzi, che per un fluido newtoniano è $\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{S}$ con $\mathbb{S} = 2\mu\mathbb{D} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbb{I}$ e $\mathbb{D} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}]$ il tensore velocità di deformazione, parte simmetrica del gradiente della velocità. Introducendo la derivata materiale, si ritrova una forma «familiare» del secondo principio della dinamica

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \rho \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f}$$

Richiami di geometria delle curve nello spazio.

Una curva è un luogo di punti che può essere parametrizzato tramite un parametro solo. La parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ della curva \mathbf{r} è definita regolare se $d\mathbf{r}/dt \neq 0$. Si definisce poi una parametrizzazione regolare particolare, l'ascissa curvilinea s tale per cui $|d\mathbf{r}(s)/ds| = 1, \forall s \in (a, b)$.

Nel seguito si introduce brevemente la **terna di Frenet** $\{\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}}\}$, formata dai versori tangente, normale e binormale, in funzione dell'ascissa curvilinea. Si dimostra che

$$\hat{\mathbf{t}}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

¹ I più curiosi, cerchino «formula di Jacobi».

La derivata seconda della posizione \mathbf{r} , cioè la derivata prima del versore tangente $\hat{\mathbf{t}}$ è legata al versore normale $\hat{\mathbf{n}}$, tramite la curvatura $k = \left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right|$.

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}}{\left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right|} \Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = k\hat{\mathbf{n}}$$

Il versore binormale è definito a completare la terna ortonormale destrorsa

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}$$

Per completezza e senza troppo sforzo si calcolano anche le derivate di tali versori, ricordando che hanno modulo unitario e costante, e formano una terna ortogonale in ogni punto, introducendo la definizione della torsione $\tau = \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} \cdot \hat{\mathbf{b}}$.

$$\begin{aligned} & \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = k\hat{\mathbf{n}} \\ \begin{cases} \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{t}} + \hat{\mathbf{t}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = \tau \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{t}} = -k \\ \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = \tau \end{cases} & \Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = -k\hat{\mathbf{t}} + \tau\hat{\mathbf{b}} \\ \begin{cases} \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0 \\ \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{t}} + \hat{\mathbf{t}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0 \\ \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0 \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0 \\ \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{t}} = -\hat{\mathbf{t}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0 \\ \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = -k \end{cases} & \Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = -\tau\hat{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

Se la parametrizzazione regolare della curva non è l'ascissa curvilinea, si può ricavare

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = v\hat{\mathbf{t}}$$

dove si è introdotto il modulo v di quella che sarà la velocità \mathbf{v} quando \mathbf{r} e t saranno spazio e tempo. In maniera analoga

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = vk\hat{\mathbf{n}}$$

Se \mathbf{r} e t sono spazio e tempo, la velocità e l'accelerazione di un punto che ha come legge oraria $\mathbf{r}(t)$ sono

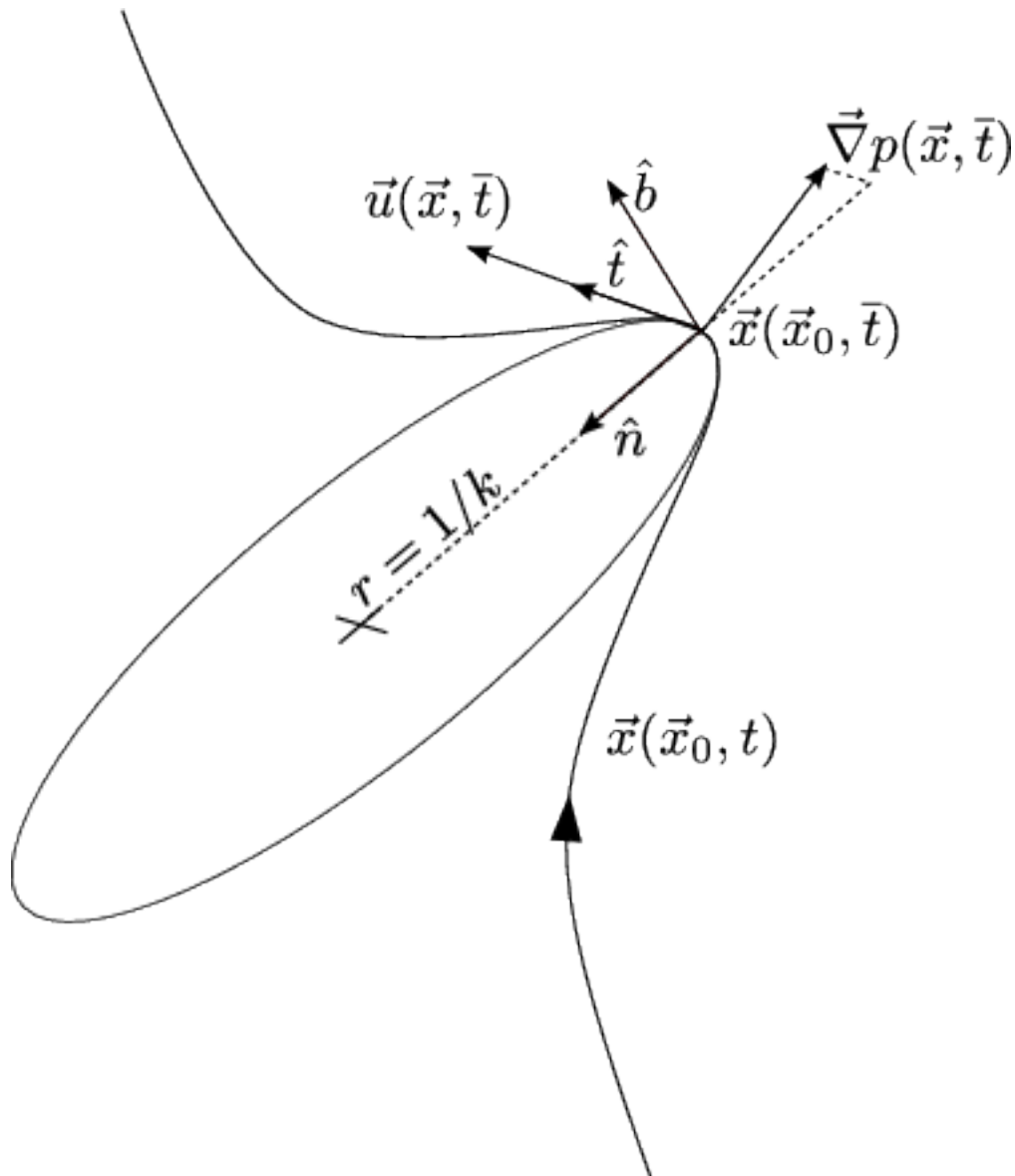
$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = v\hat{\mathbf{t}} \\ \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{t}} + v\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{t}} + v^2k\hat{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

Ritorno al bilancio della quantità di moto.

Inserendo la forma dell'accelerazione nell'equazione della quantità di moto e proiettando lungo i versori della terna di Frenet

$$\begin{cases} \rho \frac{dv}{dt} = \hat{\mathbf{t}} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f}) \\ \rho v^2 k = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f}) \\ 0 = \hat{\mathbf{b}} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f}) \end{cases}$$

L'analisi per componenti locali dell'equazione della quantità di moto permette di riconoscere che:



- la proiezione del termine forzante lungo la tangente alla traiettoria è la responsabile dell'accelerazione tangenziale della particella materiale;
- la proiezione del termine forzante lungo la normale alla traiettoria è la responsabile dell'accelerazione centripeta della particella maeriale e, di conseguenza, della curvatura della traiettoria;
- la proiezione della forzante lungo la direzione binormale è nulla.

In assenza di forze di volume ($\mathbf{f} = 0$) e sforzi viscosi ($\mathbb{T} = \mathbb{S} - p\mathbb{I} = -p\mathbb{I}$):

$$\begin{cases} \rho \frac{dv}{dt} = -\hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla p \\ \rho v^2 k = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla p \\ 0 = -\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla p \end{cases}$$

e quindi:

- l'accelerazione tangenziale è proporzionale alla proiezione del gradiente di pressione in direzione tangente alla traiettoria;

- l'accelerazione centripeta, $v^2/r = v^2 k$, è proporzionale alla proiezione del gradiente di pressione in direzione normale alla traiettoria. Il termine $\rho v^2 k$ è sempre positivo poiché prodotto di quantità positive: la curvatura di una linea è non negativa per come è definita, la densità è positiva, il modulo di un vettore è anch'esso non negativo. Il prodotto scalare tra la normale e il gradiente della pressione (derivata direzionale della pressione in direzione $\hat{\mathbf{n}}$) deve quindi essere negativo. La pressione quindi diminuisce, andando verso il centro del cerchio osculatore. Sempre dalla seconda equazione è immediato notare che la curvatura della traiettoria è proporzionale alla componente del gradiente di pressione lungo il versore normale;
- la proiezione del gradiente di pressione in direzione binormale a una traiettoria è nullo.

4.16.3 Vorticità

L'equazione della vorticità in coordinate euleriane è

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$$

Se viene fatta l'ipotesi di viscosità nulla, il termine contenente il laplaciano della vorticità non compare nell'equazione: questo termine è il responsabile della diffusione (isotropia per come è scritto) della vorticità.

L'equazione può essere quindi riscritta come:

$$\frac{D \boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

Scritta in componenti

$$\frac{D \omega_i}{Dt} = \omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

Il termine di destra può essere riscritto come

$$\begin{aligned} \omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} &= \omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_{0l}} \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} = \left(u_i = \frac{D x_i}{Dt} \right) \\ &= \omega_k \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \right) \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Vale la relazione

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} = \delta_{ik}$$

Il termine di sinistra può essere riscritto come

$$\frac{D \omega_i}{Dt} = \frac{D}{Dt} (\delta_{ik} \omega_k) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \omega_k \right)$$

Inserendo nell'equazione della vorticità e sfruttando le proprietà della derivata del prodotto:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \omega_k \right) - \omega_k \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \right) \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} &= 0 \\ \frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \omega_k \right) &= 0 \end{aligned}$$

Se la trasformazione non è singolare, risulta quindi

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \omega_k \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \omega_k = \omega_{l0}$$

e in conclusione, invertendo il gradiente della trasformazione delle coordinate

$$\omega_k = \frac{\partial x_k}{\partial x_{0l}} \omega_{l0} \quad , \quad \mathbb{Q} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \mathbb{Q}_0$$

Si può quindi notare che la vorticità segue la stessa evoluzione di un segmento infinitesimo materiale, per il quale vale:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} d\mathbf{x}_0$$

4.17 Introduction to exercises

I bilanci integrali consentono di valutare le azioni integrali (forze, momenti, potenza) scambiati tra un fluido e un corpo a contatto con esso, senza conoscere nel dettaglio il campo di moto del fluido di interesse, ma valutando il flusso netto delle quantità meccaniche di interesse (massa, quantità di moto, momento della quantità di moto, energia, entalpia e calore) attraverso la superficie di contorno del volume fluido di interesse. Il contorno del dominio fluido $v(t)$ viene suddiviso nella parte a contatto con il corpo di interesse $s_{f,s}(t)$ e nella parte rimanente $s_{f,free}(t) = \partial v(t) \setminus s_{f,s}(t)$.

4.17.1 Bilancio della quantità di moto e risultante delle forze.

La risultante delle forze agenti sul corpo¹ sarà uguale all'integrale del vettore sforzo agente sulla superficie $s_{s,f}(t)$,

$$\mathbf{R}^s = \oint_{s_{s,f}(t)} \mathbf{t}_{n,s} \, ,$$

avendo indicato con $s_{s,f}(t)$ la superficie del solido con normale uscente dalla superficie solida ed entrante nel solido e con $\mathbf{t}_{n,s}$ il vettore sforzo agente sul solido, uguale e contrario allo sforzo agente sul fluido nello stesso punto, $\mathbf{t}_{n,s} = -\mathbf{t}_n$, per il principio di azione e reazione (terzo principio della dinamica). Non è stato aggiunto il pedice f al vettore sforzo agente sul fluido, poiché siamo in un corso di fluidodinamica e il soggetto è il fluido, quando è sottointeso. Si può riconoscere la risultante \mathbf{R}^s all'interno del bilancio integrale della quantità di moto per il volume fluido $v(t)$,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial v(t)} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v(t)} \mathbf{f} + \oint_{\partial v(t)} \mathbf{t}_n \, .$$

Si analizzano i termini di superficie, considerando separatamente i contributi delle superfici $s_{f,s}$ e $s_{f,free}$. Se il solido ha una superficie impermeabile al fluido e non c'è flusso di massa, la velocità del fluido e del solido sono uguali, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, sulla superficie $s_{f,s}$. Di conseguenza rimane solo il contributo del flusso della quantità di moto attraverso la superficie $s_{f,free}$, mentre il termine di flusso attraverso $s_{f,s}$ è nullo. L'integrale sul contorno $\partial v(t)$ del vettore sforzo può essere suddiviso nella somma dell'integrale svolto sulla superficie a contatto con il solido e sulla superficie libera,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial v(t)} \mathbf{t}_n &= \oint_{s_{f,s}(t)} \mathbf{t}_n + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{t}_n = \\ &= - \oint_{s_{s,f}(t)} \mathbf{t}_{n,s} + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{t}_n = -\mathbf{R}^s + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{t}_n \, . \end{aligned}$$

Spesso sulla superficie libera $s_{f,free}(t)$ possono essere trascurati gli sforzi viscosi: in questo caso, il vettore sforzo si riduce al solo effetto della pressione $\mathbf{t}_n = -p\hat{\mathbf{n}}$.

¹ La risultante delle forze delle azioni scambiate con il fluido. A questa andranno sommate le forze di volume, come ad esempio il peso del corpo stesso.

Ritornando al bilancio della quantità di moto, si può scrivere

$$\mathbf{R}^s = - \int_{s_{f,free}} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_{s_{f,free}(t)} \mathbf{t}_n - \int_{v(t)} \mathbf{f} - \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \mathbf{u}$$

Nel caso in cui il problema sia stazionario e che le forze di volume nel fluido siano trascurabili, gli ultimi due termini si annullano. Se poi si possono trascurare gli sforzi viscosi su $s_{f,free}$, la superficie $s_{f,free}$ è una superficie chiusa (si pensi alla superficie «all'infinito» attorno a un corpo, come esempio) e la pressione è costante su questa superficie chiusa, l'integrale degli sforzi su $s_{f,free}$ è anch'esso nullo, poiché

$$\oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{t}_n = - \oint_{s_{f,free}(t)} p \hat{\mathbf{n}} = -p \oint_{s_{f,free}(t)} \hat{\mathbf{n}} \equiv 0,$$

e la risultante delle forze agenti sul solido si riduce a

$$\mathbf{R}^s = - \int_{s_{f,free}} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

4.17.2 Bilancio del momento della quantità di moto e risultante dei momenti.

Riproponendo un ragionamento analogo, dal bilancio del momento della quantità di moto si può ricavare la risultante dei momenti agenti su un corpo,

$$\mathbf{M} = \oint_{s_{s,f}} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_{n,s}.$$

Nel caso semplificato in cui il problema sia stazionario, le forze di volume sono trascurabili, gli sforzi viscosi sono trascurabili sulla superficie $s_{f,free}(t)$ chiusa, sulla quale agisce una pressione costante, la risultante dei momenti agenti sul solido si riduce a

$$\mathbf{M}^s = - \int_{s_{f,free}} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

dove \mathbf{r} è il raggio vettore tra i punti sulla superficie $s_{f,free}(t)$ e il polo rispetto al quale si calcolano i momenti.

4.17.3 Bilancio dell'energia totale.

Tramite il bilancio dell'energia totale si può ricavare la potenza fornita (o assorbita) da un corpo al fluido, e/o il calore scambiato con esso. Gli esercizi che utilizzeranno il bilancio di energia totale ricorderanno alcuni esercizi di Fisica Tecnica. Lo scopo di questi esercizi è quello di proporre un punto di vista più maturo a tali problemi, partendo ai bilanci integrali nella loro forma più generale e opportunamente semplificati considerando grandezze uniformi sulle sezioni (o equivalenti grandezze medie) e ipotesi sullo scambio di calore tra il fluido e l'esterno. Verranno analizzati sistemi aperti e chiusi, nella speranza di fornire un approccio di validità generale a problemi già trattati durante il corso di Fisica Tecnica, senza alcuna pretesa di coprire tutti gli argomenti e i dettagli trattati in quel corso, ma piuttosto consentire una visione del problema generale che coinvolga scambi di massa, lavoro e calore del sistema con l'esterno, facilmente specializzabile a casi particolari, che riduca al minimo lo sforzo mnemonico richiesto da molti casi particolari, apparentemente correlati l'uno dall'altro, a vantaggio di una maggiore «sensibilità» sul fenomeno fisico.

Sfruttando la suddivisione della superficie del volume fluido $\partial v = s_{f,free} \cup s_{f,s}$, si può riscrivere il bilancio dell'energia totale,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t + \oint_{\partial v(t)} \rho e^t (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{\partial v(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{v(t)} \rho r.$$

riconoscendo la potenza

$$W = \oint_{s_{f,s}} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} ,$$

fornita da un corpo solido al fluido,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t + \oint_{\partial v(t)} \rho e^t (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \\ &= \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} + W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{v(t)} \rho r . \end{aligned}$$

Se non c'è flusso di massa attraverso la superficie solida, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ su $s_{f,s}$. Se la superficie libera $s_{f,free}$ del volume di controllo è fissa, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ su $s_{f,free}$. Separando il contributo degli sforzi di pressione da quelli viscosi, $\mathbf{t}_n = -p\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{s}_n$ sulla superficie $s_{s,free}$, il bilancio dell'energia totale diventa,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t + \oint_{s_{f,free}(t)} \rho h^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \\ &= \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{u} + W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{v(t)} \rho r , \end{aligned}$$

avendo introdotto l'entalpia totale $h^t = e^t + \frac{p}{\rho} = e + \frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}$. Se si trascurano la potenza degli sforzi viscosi su $s_{s,free}$ e la potenza delle forze di volume \mathbf{f} , il bilancio dell'energia totale del fluido contenuto nel volume $v(t)$ diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t + \oint_{s_{f,free}(t)} \rho h^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{v(t)} \rho r .$$

4.17.4 Sistemi aperti

Per un sistema aperto in cui sono soddisfatte le ipotesi già elencate, si può scrivere

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t = - \oint_{s_{f,free}(t)} \rho h^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{v(t)} \rho r ,$$

e sinteticamente

$$\frac{dE^t}{dt} = \Phi_{h^t} + W + \dot{Q} ,$$

avendo definito l'energia totale interna E^t al volume $v(t)$ studiato, il flusso netto di entalpia totale Φ_{h^t} attraverso la superficie $s_{s,free}$, e il flusso di calore \dot{Q} fornito al fluido contenuto all'interno di $v(t)$,

$$\begin{aligned} E &= \int_{v(t)} \rho e \\ \Phi_{h^t} &= \int_{s_{f,free}} \rho h^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{s_{f,free}} \rho \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ \dot{Q} &= - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{v(t)} \rho r . \end{aligned}$$

4.17.5 Sistemi chiusi

Per un sistema chiuso (nessuno scambio di massa con l'esterno) in cui i termini cinetici sono trascurabili, $e^t = e$, il bilancio di energia diventa sintenticamente,

$$\frac{dE}{dt} = W + \dot{Q},$$

avendo definito $E = \int_{v(t)} \rho e$, come l'energia interna del fluido contenuto nel volume $v(t)$. Questa formula corrisponde al primo principio della Termodinamica, formulato in termini di potenza e non di energia, in cui è stata utilizzata la convenzione di potenza delle forze positiva e flusso di calore positivo se fornito al fluido.²

4.18 Galilean relativity

Galilean transformation between position in two reference frames in relative uniform motion reads

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t \\ t' = t \end{cases}$$

with \mathbf{v} constant and independent from position in space. Derivative of composite functions gives

$$\begin{aligned} \partial_t &= \partial_{t'} + \mathbf{v} \cdot \nabla' \\ \nabla &= \nabla' \end{aligned}$$

4.18.1 Differential equations

Mass.

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \\ &= \partial_{t'} \rho - \mathbf{v} \cdot \nabla' \rho + \nabla \cdot (\rho' (\mathbf{u}' + \mathbf{v})) = \\ &= \partial_{t'} \rho - \mathbf{v} \cdot \nabla' \rho + \nabla \cdot (\rho' \mathbf{u}') + \mathbf{v} \cdot \nabla' \rho = \\ &= \partial_{t'} \rho + \nabla' \cdot (\rho \mathbf{u}') . \end{aligned}$$

Momentum.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbb{T} + \rho \mathbf{g} &= \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \\ &= \partial_{t'} (\rho \mathbf{u}) - \mathbf{v} \cdot \nabla' (\rho \mathbf{u}) + \nabla' \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \\ &= \partial_{t'} (\rho \mathbf{u}') + \partial_{t'} (\rho \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla' (\rho \mathbf{u}) + \nabla' \cdot (\rho (\mathbf{u}' + \mathbf{v}) \mathbf{u}) = \\ &= \partial_{t'} (\rho \mathbf{u}') + \mathbf{v} \partial_{t'} \rho - \mathbf{v} \cdot \nabla' (\rho \mathbf{u}) + \nabla' \cdot (\rho \mathbf{u}' \mathbf{u}) + \nabla' \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{u}) = \\ &= \partial_{t'} (\rho \mathbf{u}') + \mathbf{v} \partial_{t'} \rho - \mathbf{v} \cdot \nabla' (\rho \mathbf{u}) + \nabla' \cdot (\rho \mathbf{u}' \mathbf{u}') + \nabla' \cdot (\rho \mathbf{u}') \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla' (\rho \mathbf{u}) = \\ &= \partial_{t'} (\rho \mathbf{u}') + \nabla' \cdot (\rho \mathbf{u}' \mathbf{u}') . \end{aligned}$$

with the stress tensor and the volume force independent from Galilean transformations.

Total energy. Total energy can be written as the sum of internal and kinetic energy $e^t = e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}$. Internal energy is independent from a change of reference frame, being a scalar quantity quantifying the microscopic dynamics w.r.t. the macroscopic average motion. Total energy equation reads

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} = \partial_t (\rho e^t) + \nabla \cdot (\rho e^t \mathbf{u}) ,$$

² In Termodinamica, che studia sistemi in equilibrio, il primo principio è formulato in termini di energia come, $\Delta E = Q - L$, in cui la variazione di energia ΔE tra due stati termodinamici del sistema corrisponde alla differenza del calore Q fornito al sistema e al lavoro L svolto dal sistema.

Contributions of the kinetic energy transform as shown below for the kinetic energy equation. Heat flux contribution is independent from the reference frame. Power of stress and terms with internal energy become

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) &= \underbrace{\nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}')}_{e.1} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \mathbb{T}}_{q.1} \\ &\dots \\ \partial_t (\rho e) + \nabla (\rho e \mathbf{u}) &= \partial_{t'} (\rho e) - \mathbf{v} \cdot \nabla' (\rho e) + \nabla' \cdot (\rho e \mathbf{u}') + \mathbf{v} \cdot \nabla (\rho e) = \\ &= \underbrace{\partial_{t'} (\rho e) + \nabla' \cdot (\rho e \mathbf{u}')}_{e.2}\end{aligned}$$

Kinetic energy.

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbb{T} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} &= \partial_t \left(\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \right), \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbb{T} &= \underbrace{\mathbf{u}' \cdot \nabla \cdot \mathbb{T}}_{k.1} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \mathbb{T}}_{q.1} \\ \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{g} &= \underbrace{\mathbf{u}' \cdot \rho \mathbf{g}}_{k.2} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{g}}_{q.2} \\ \partial_t \left(\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) &= \partial_{t'} \left(\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) - \mathbf{v} \cdot \nabla' \left(\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) = \\ &= \underbrace{\partial_{t'} \left(\rho \frac{|\mathbf{u}'|^2}{2} \right)}_{k.3} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \partial_{t'} (\rho \mathbf{u})}_{q.3} + \underbrace{\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \partial_{t'} \rho}_{m.3} - \underbrace{\mathbf{v} \cdot \left(\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right)}_{0.1} \\ \nabla \cdot \left(\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \right) &= \nabla' \cdot \left(\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u}' \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla' \left(\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) = \\ &= \underbrace{\nabla' \cdot \left(\rho \frac{|\mathbf{u}'|^2}{2} \mathbf{u}' \right)}_{k.4} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla' \cdot (\rho \mathbf{u}' \mathbf{u}')}_{q.4} + \underbrace{\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \nabla' \cdot (\rho \mathbf{u}')}_{m.4} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla' \left(\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right)}_{0.2},\end{aligned}$$

Terms q.x make the kinetic energy equation in the new reference frame, m.x, q.x simplify for the mass and momentum equation respectively, as they are $\mathbf{v} \cdot \text{mom. eq.}$ and $\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}$ (mass eq.), 0.x sum up to zero.

4.18.2 Integral equations

Mass.

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho + \oint_{\partial V_t} \rho \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

Mass equation doesn't change as relative velocity (velocity of the continuum w.r.t. the points of boundary of the volume V_t) is independent from the reference frame.

Momentum.

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial V_t} \rho \mathbf{u} \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V_t} \rho \mathbf{g} + \oint_{\partial V_t} \mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}}$$

Let $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}$, with \mathbf{v} independent from space and time. The first two terms become

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{u}' + \mathbf{v} \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho + \oint_{\partial V_t} \rho \mathbf{u}' \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \mathbf{v} \oint_{\partial V_t} \rho \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \\ \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{u}' + \oint_{\partial V_t} \rho \mathbf{u}' \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \mathbf{v} \underbrace{\left[\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho + \oint_{\partial V_t} \rho \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right]}_{=0 \text{ mass eq.}} &.\end{aligned}$$

Kinetic energy.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \oint_{V_t} \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \int_{V_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \oint_{\partial V_t} \mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}} \cdot \mathbf{u} - \int_{V_t} \nabla \mathbf{u} : \mathbb{T} . \\
 \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} &= \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \frac{|\mathbf{u}'|^2}{2} + \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{u}' + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \\
 \oint_{V_t} \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{V_t} \rho \frac{|\mathbf{u}'|^2}{2} \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \mathbf{v} \cdot \oint_{V_t} \rho \mathbf{u}' \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \oint_{V_t} \rho \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\
 \int_{V_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} &= \int_{V_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}' + \mathbf{v} \cdot \int_{V_t} \rho \mathbf{g} \\
 \oint_{\partial V_t} \mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}} \cdot \mathbf{u} &= \oint_{\partial V_t} \mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}} \cdot \mathbf{u}' + \mathbf{v} \cdot \oint_{\partial V_t} \mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}} \\
 - \int_{V_t} \nabla \mathbf{u} : \mathbb{T} &= - \int_{V_t} \nabla \mathbf{u}' : \mathbb{T}
 \end{aligned}$$

Terms $\mathbf{v} \cdot$ multiply momentum equation, and terms $\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}$ multiply mass equation, and thus sum up to zero.

Total energy.

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho e^t + \oint_{V_t} \rho e^t \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \oint_{\partial V_t} \mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}} \cdot \mathbf{u} - \oint_{\partial V_t} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q}$$

The contributions of the internal energy are independent from the reference frame. Other terms transform as shown above in the section about the kinetic energy equation. The conclusion is that the expression of the total energy equation is independent from the inertial frame.

4.19 Fluid dynamics in a non-inertial reference frame

Following the same approach as [Mechanics:Relative Kinematics:Point](#), the position of a point P is determined by the position vectors w.r.t. an inertial reference frame - here defined by an origin and a set of Cartesian coordinates - $I : (O, x, y, z)$, and w.r.t. a generic reference frame - $G : (O_1, x_1, y_1, z_1)$.

$$\begin{aligned}
 (P - O) &= (O_1 - O) + (P - O_1) \\
 \mathbf{r}_{P/O} &= \mathbf{r}_{O_1/O} + \mathbf{r}_{P/O_1}
 \end{aligned}$$

The unit vectors of the generic basis can be projected on the inertial basis as

$$\hat{\mathbf{e}}_i^1 = \hat{\mathbf{e}}_i^1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_k \hat{\mathbf{e}}_k = \mathbb{R}^{0 \rightarrow 1} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i ,$$

and their time derivatives read

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{e}}_i^1 = \omega_1 \times \hat{\mathbf{e}}_i^1 .$$

Vector $\mathbf{r}_{P/O}$ is written as \mathbf{r} for brevity, and \mathbf{r}_{P/O_1} is written as a reference rotated vector, so that

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O_1/O} + \mathbb{R}^{0 \rightarrow 1} \cdot \mathbf{r}' ,$$

or explicitly writing the dependence from time and the material coordinates - label - along with the relation prescribing absolute time for every observer, to get the transformation $(\mathbf{r}, t)(\mathbf{r}', t')$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(\mathbf{r}_m, t) &= \mathbf{r}_{O_1/O}(t) + \mathbb{R}^{0 \rightarrow 1}(t) \cdot \mathbf{r}'(\mathbf{r}_m, t) \\
 t &= t' .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(\mathbf{r}_m, t) &= \mathbb{R}^T(t) \cdot [\mathbf{r}(\mathbf{r}_m, t) - \mathbf{r}_{O_1}(t)] \\ t' &= t.\end{aligned}$$

Rule of differentiation of composite functions.

$$\begin{aligned}\partial_{t'-} &= \partial_{t'} t \partial_{t'-} + \partial_{t'} \mathbf{r}' \cdot \partial_{\mathbf{r}'-} \\ &= \partial_{t'-} + [\mathbf{v}_{O_1} + \dot{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{r}' + \mathbb{R} \cdot \mathbf{v}'] \cdot \partial_{\mathbf{r}'-} \\ \partial_{\mathbf{r}'-} &= \partial_{\mathbf{r}'} t \partial_{t'-} + \partial_{\mathbf{r}'} \mathbf{r}' \cdot \partial_{\mathbf{r}'-} \\ &= \mathbb{R}^T \cdot \partial_{\mathbf{r}'-} \\ \partial_{t-} &= \partial_t t' \partial_{t'-} + \partial_t \mathbf{r}' \cdot \partial_{\mathbf{r}'-} \\ &= \partial_{t'-} + [\dot{\mathbb{R}}^T \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O_1}) - \mathbb{R}^T \cdot \mathbf{v}_{O_1}] \cdot \partial_{\mathbf{r}'-} \\ \partial_{\mathbf{r}-} &= \partial_{\mathbf{r}'} t \partial_{t'-} + \partial_{\mathbf{r}'} \mathbf{r}' \cdot \partial_{\mathbf{r}'-} \\ &= \mathbb{R} \cdot \partial_{\mathbf{r}'-}\end{aligned}$$

Gradient of $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbb{R} \cdot \mathbf{r}$, $\nabla \mathbf{v} = \mathbb{R}^T$.

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbb{R} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot \mathbb{R}^T$$

and using Cartesian coordinates, $\mathbf{r} = x^i \hat{\mathbf{e}}_i$

$$\mathbf{v} = v^i \hat{\mathbf{e}}_i = R^{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j \cdot (x^k \hat{\mathbf{e}}_k) = R^{ij} x^j \hat{\mathbf{e}}_i$$

so that the gradient becomes

$$\partial_{\mathbf{r}} \mathbf{v} = \hat{\mathbf{e}}_i \partial_{x^i} (v^k(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_k) = \partial_{x^i} v^k \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_k = \partial_{x^i} (R^{kj} x^j) \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_k = (R^{kj} \delta^{ij}) \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_k = R^{ki} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_k = \mathbb{R}^T.$$

...

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbb{R} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathbb{R}^T$$

and using Cartesian coordinates, $\mathbf{r} = x^i \hat{\mathbf{e}}_i$

$$\mathbf{v} = v^i \hat{\mathbf{e}}_i = R^{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j \cdot (u^k(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_k) = R^{ij} u^j(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_i$$

so that the gradient becomes

$$\partial_{\mathbf{r}} \mathbf{v} = \hat{\mathbf{e}}_i \partial_{x^i} (v^k(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_k) = \partial_{x^i} v^k \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_k = \partial_{x^i} (R^{kj} u^j(x^\ell)) \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_k = (R^{kj} \partial_i u^j) \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_k = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbb{R}^T.$$

$$\mathbf{a} \cdot \partial_{\mathbf{r}} \mathbf{v} = a^m \hat{\mathbf{e}}_m \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \partial_{x^i} (v^k(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_k) = \partial_{x^m} v^k \hat{\mathbf{e}}_k = a^m \partial_{x^m} (R^{kj} u^j(x^\ell)) \hat{\mathbf{e}}_k = a^m (R^{kj} \partial_m u^j) \hat{\mathbf{e}}_k = \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbb{R} = \mathbb{R} \cdot (\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}).$$

Divergence $\nabla \cdot (\mathbb{A} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}))$

If the tensor \mathbb{A} is independent from \mathbf{r} ,

$$\nabla \cdot (\mathbb{A} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r})) = \partial_{x^i} (A^{ij} v^j) = \mathbb{A}^T : \nabla \mathbf{v}.$$

Velocity. Velocity of a material point reads

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{r}(\mathbf{r}_m, t), t) &:= \partial_t \mathbf{r}|_{\mathbf{r}_m} = \\ &= \mathbf{v}_{O_1} + \dot{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{r}' + \mathbb{R} \cdot \partial_t \mathbf{r}'|_{\mathbf{r}_m} = \\ &= \mathbf{v}_{O_1} + \dot{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{r}' + \mathbb{R} \cdot \mathbf{v}' =\end{aligned}$$

Acceleration.

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \partial_t \mathbf{u}|_{\mathbf{r}_m} = \\ &= \partial_t \mathbf{u}|_{\mathbf{r}} + \partial_t \mathbf{r}|_{\mathbf{r}_m} \cdot \partial_{\mathbf{r}} \mathbf{u} = \\ &= \partial_t \mathbf{u}|_{\mathbf{r}} + \mathbf{u} \cdot \partial_{\mathbf{r}} \mathbf{u}\end{aligned}$$

Using differentiation rules for composite functions, the advection operator becomes

$$\begin{aligned}\partial_t|_{\mathbf{r}} + \mathbf{u} \cdot \partial_{\mathbf{r}} &= \partial_{t'} + [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O_1}) \cdot \dot{\mathbb{R}} - \mathbf{v}_{O_1} \cdot \mathbb{R}] \cdot \partial_{\mathbf{r}'} + [\mathbf{v}_{O_1} + \mathbf{r}' \cdot \dot{\mathbb{R}}^T + \mathbf{v}' \cdot \mathbb{R}^T] \cdot \mathbb{R} \cdot \partial_{\mathbf{r}'} = \\ &= \partial_{t'} + \underbrace{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O_1}) - \mathbf{r}' \cdot \mathbb{R}^T]}_{=0} \cdot \dot{\mathbb{R}} \cdot \partial_{\mathbf{r}'} + \mathbf{v}' \cdot \partial_{\mathbf{r}'} = \\ &= \partial_{t'}|_{\mathbf{r}'} + \mathbf{v}' \cdot \partial_{\mathbf{r}'},\end{aligned}$$

and thus

$$\begin{aligned}[\partial_{t'}|_{\mathbf{r}'} + \mathbf{v}' \cdot \partial_{\mathbf{r}'}] \mathbf{u} &= [\partial_{t'}|_{\mathbf{r}'} + \mathbf{v}' \cdot \partial_{\mathbf{r}'}] (\mathbf{v}_{O_1}(t) + \dot{\mathbb{R}}(t') \cdot \mathbf{r}' + \mathbb{R}(t) \cdot \mathbf{v}'(\mathbf{r}', t')) \\ &= [\partial_{t'}|_{\mathbf{r}'} + \mathbf{v}' \cdot \partial_{\mathbf{r}'}] (\mathbf{v}_{O_1}(t) + \omega_{\times}(t') \cdot \mathbb{R}(t') \cdot \mathbf{r}' + \mathbb{R}(t) \cdot \mathbf{v}'(\mathbf{r}', t')) \\ &= \mathbf{a}_{O_1} + \alpha_{\times} \cdot \mathbb{R} \cdot \mathbf{r}' + \omega_{\times} \cdot \omega_{\times} \cdot \mathbb{R} \cdot \mathbf{r}' + 2\omega_{\times} \cdot \mathbb{R} \cdot \mathbf{v}' + \mathbb{R} \cdot \partial_{t'} \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \partial_{\mathbf{r}'} (\mathbb{R} \cdot \mathbf{v}') = \\ &= \mathbf{a}_{O_1} + \alpha_{\times} \cdot \mathbb{R} \cdot \mathbf{r}' + \omega_{\times} \cdot \omega_{\times} \cdot \mathbb{R} \cdot \mathbf{r}' + 2\omega_{\times} \cdot \mathbb{R} \cdot \mathbf{v}' + \mathbb{R} \cdot [\partial_{t'} \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \partial_{\mathbf{r}'} \mathbf{v}'] = \\ &= \mathbf{a}_{O_1} + \alpha_{\times} \cdot \mathbb{R} \cdot \mathbf{r}' + \omega_{\times} \cdot \omega_{\times} \cdot \mathbb{R} \cdot \mathbf{r}' + 2\omega_{\times} \cdot \mathbb{R} \cdot \mathbf{v}' + \mathbb{R} \cdot \underbrace{[\partial_{t'} \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \nabla' \mathbf{v}']}_{=: \mathbf{a}'},\end{aligned}$$

having defined the acceleration of the material particles $\mathbf{a}'(\mathbf{r}', t)$ as seen by the non-inertial observer. Multiplying by \mathbb{R}^T , all the terms are written w.r.t. the reference coordinates of the non-inertial reference frame. The very same procedure applies to the transformation of balance equations.

4.19.1 Differential equations

Mass

Conservative form of differential mass equation reads

$$\begin{aligned}0 &= \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \\ &= \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = \\ &= \partial_{t'} \rho + \mathbf{v}' \cdot \nabla' \rho + \rho \nabla' \cdot \mathbf{u},\end{aligned}$$

Since

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= \nabla \cdot (\mathbf{v}_{O_1} + \dot{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{r}' + \mathbb{R} \cdot \mathbf{v}') = \quad (\text{see dropdown below}) \\ &= \nabla' \cdot \mathbf{v}',\end{aligned}$$

the mass equation in the non-inertial reference frame has the very same expression as the mass equation in the inertial reference frame,

$$\begin{aligned}0 &= \partial_{t'} \rho + \mathbf{v}' \cdot \nabla' \rho + \rho \nabla' \cdot \mathbf{v}' = \\ &= \partial_{t'} \rho + \nabla' \cdot (\rho \mathbf{v}').\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}$$

For generic tensor \mathbb{A} and vector \mathbf{v} ,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbb{A} \cdot \mathbf{v}) &= \partial_{x^i} (A^{ij} v^j) = \\ &= \partial_{x^i} x'^k \partial_{x'^k} (A^{ij} v^j) = \\ &= \partial_{x'^k} v^j A^{ij} \partial_{x^i} x'^k . \end{aligned}$$

If $\mathbb{A} = \mathbb{R}$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$, then

$$\nabla \cdot (\mathbb{R} \cdot \mathbf{v}') = \partial_{x'^k} v'^j \underbrace{R^{ij} R^{ik}}_{\delta_{jk}} = \partial_{x'^k} v'^k = \nabla' \cdot \mathbf{v}'(\mathbf{r}', t) .$$

If $\mathbb{A} = \dot{\mathbb{R}}$, $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$, then

$$\nabla \cdot (\dot{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{r}') = \partial_{x'^k} r'^j \underbrace{\dot{R}^{ij} R^{ik}}_{\delta_{jk} \{-\omega_{\times}\}_{jk}} = \delta_{jk} \varepsilon_{jlk} \omega_l = 0 ,$$

as Levi-Civita symbols are zero with repeated indices, and $\dot{\mathbb{R}} = \omega_{\times} \cdot \mathbb{R}$, and thus $-\omega_{\times} = \omega_{\times}^T = \dot{\mathbb{R}}^T \cdot \mathbb{R}$

Momentum

Convective form of differential momentum equation reads

$$\rho [\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla] \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbb{T} .$$

Using the expression of the acceleration above

$$\rho \mathbb{R} \cdot \mathbf{a}' = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbb{T} - \rho [\mathbf{a}_{O_1} + \alpha_{\times} \cdot \mathbb{R} \cdot \mathbf{r}' + \omega_{\times} \cdot \omega_{\times} \cdot \mathbb{R} \cdot \mathbf{r}' + 2\omega_{\times} \cdot \mathbb{R} \cdot \mathbf{v}'] .$$

multiplying by \mathbb{R}^T gives the expression of the momentum equation as seen by the non-inertial reference frame

$$\rho \mathbf{a}' = \rho \mathbf{g}' + \nabla' \cdot \mathbb{T}' - \rho [\mathbf{a}'_{O_1} + \alpha'_{\times} \cdot \mathbf{r}' + \omega'_{\times} \cdot \omega'_{\times} \cdot \mathbf{r}' + 2\omega'_{\times} \cdot \mathbf{v}'] ,$$

being $\mathbf{g}' := \mathbb{R}^T \cdot \mathbf{g}$, $\alpha'_{\times} = \mathbb{R}^T \cdot \alpha_{\times} \cdot \mathbb{R}$, and the transformation of the divergence of the stress tensor given in the following dropdown box.

$$\nabla \cdot \mathbb{T}$$

$$\partial_{x^i} T^{ij}(x^\ell) = \partial_{x^i} x'^k \partial_{x'^k} T^{ij}(x^\ell(x'^m)) ,$$

and thus

$$\mathbb{R}^T \cdot \nabla \cdot \mathbb{T} = R^{j\ell} R^{ik} \partial_{x'^k} T^{ij} = \partial_{x'^k} (R^{ik} T^{ij} R^{j\ell}) = \nabla \cdot (\mathbb{R}^T \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbb{R}) = \nabla' \cdot \mathbb{T}' .$$

Kinetic energy

Total energy

4.19.2 Homogeneity and isotropy

4.19.3 Galilean relativity

With \mathbf{v} constant in time and independent from position in space

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}t \\ t = t' \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t \\ t' = t \end{cases}$$

and thus, the velocity of a point whose position in function of time $\mathbf{r}(t)$ reads

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}$$

Using derivatives of composite functions

$$\begin{aligned} \partial_t &= \partial_{t'} - \mathbf{v} \cdot \nabla' \\ \nabla &= \nabla' \end{aligned}$$

Details

$$\begin{aligned} \partial_t f(\mathbf{r}, t) &= \partial_t f'(\mathbf{r}'(\mathbf{r}, t), t'(\mathbf{r}, t)) = \\ &= \partial_t \mathbf{r}' \cdot \partial_{\mathbf{r}'} f' + \partial_t t' \partial_{t'} f' = \\ &= -\mathbf{v} \cdot \nabla' f' + \partial_{t'} f' . \\ \nabla &= \dots = \nabla' \end{aligned}$$

Mass. Conservative form

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \\ &= \partial_{t'} \rho - \mathbf{v} \cdot \nabla' \rho + \nabla' \cdot (\rho (\mathbf{u}' + \mathbf{v})) = \\ &= \partial_{t'} \rho - \mathbf{v} \cdot \nabla' \rho + \nabla' \cdot (\rho \mathbf{u}') + \mathbf{v} \cdot \nabla' \rho = \\ &= \partial_{t'} \rho + \nabla' \cdot (\rho \mathbf{u}') . \end{aligned}$$

4.19.4 Integral equations

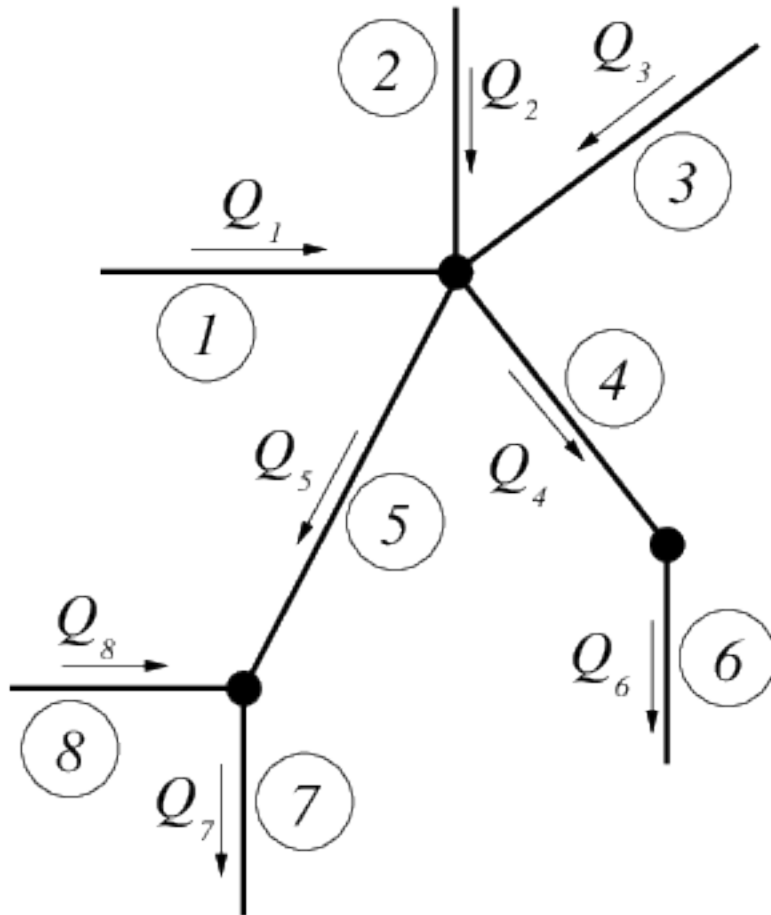
Galilean relativity

4.20 Exercises

Exercise 4.1 Si consideri una rete idraulica come quella rappresentata in figura. All'interno dei tubi scorre acqua. Sia nota le velocità media dell'acqua all'interno di alcuni dei rami della rete: $U_1 = 1 \text{ m/s}$, $U_2 = 1.5 \text{ m/s}$, $U_3 = 0.5 \text{ m/s}$, $U_7 = 2 \text{ m/s}$ e $U_8 = 0.3 \text{ m/s}$. Il verso della velocità è indicato dalle frecce sul disegno. Determinare la portata volumetrica, la portata in massa e la velocità media all'interno di ciascun ramo della rete sapendo che l'acqua ha una densità pari a $\bar{\rho} = 999 \text{ kg/m}^3$, e che il diametro dei tubi è rispettivamente $D_1 = 0.4 \text{ m}$, $D_2 = 0.2 \text{ m}$, $D_3 = 0.2 \text{ m}$, $D_4 = 0.3 \text{ m}$, $D_5 = 0.5 \text{ m}$, $D_6 = 0.25 \text{ m}$, $D_7 = 0.3 \text{ m}$, $D_8 = 0.6 \text{ m}$.

($Q_1 = 0.13 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_2 = 0.05 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_3 = 0.02 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_4 = 0.13 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_5 = 0.06 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_6 = 0.13 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_7 = 0.14 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_8 = 0.08 \text{ m}^3/\text{s}$, $U_1 = 1 \text{ m/s}$, $U_2 = 1.5 \text{ m/s}$, $U_3 = 0.5 \text{ m/s}$, $U_4 = 1.87 \text{ m/s}$, $U_5 = 0.29 \text{ m/s}$,

$$U_6 = 2.69 \text{ m/s}, U_7 = 2 \text{ m/s}, U_8 = 0.3 \text{ m/s}, \bar{Q}_1 = 125.5 \text{ kg/s}, \bar{Q}_2 = 47.08 \text{ kg/s}, \bar{Q}_3 = 15.69 \text{ kg/s}, \bar{Q}_4 = 131.8 \text{ kg/s}, \bar{Q}_5 = 54.49 \text{ kg/s}, \bar{Q}_6 = 131.8 \text{ kg/s}, \bar{Q}_7 = 141.2 \text{ kg/s}, \bar{Q}_8 = 84.74 \text{ kg/s}$$

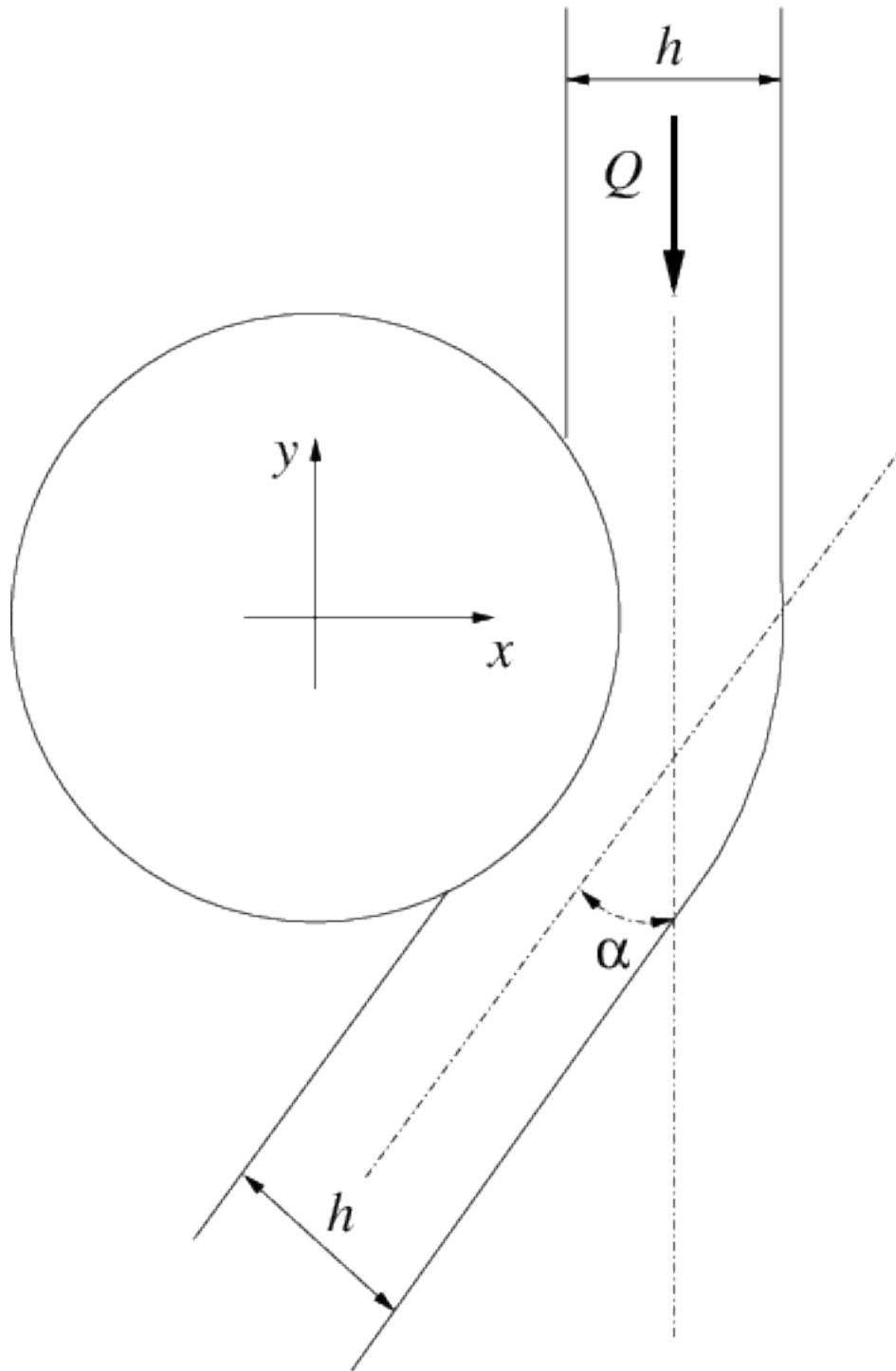


Exercise 4.2 Si sta riempiendo una bombola per immersioni subacquee. Sapendo che la pompa aspira aria a pressione ambiente di $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ e alla temperatura di 293 K in un condotto di sezione 1 cm^2 in cui la velocità media è di 0.5 m/s e che non ci sono perdite nel sistema di pompaggio, determinare la rapidità di variazione della massa d'aria e della sua densità all'interno della bombola, sapendo che il volume della bombola è pari a 0.02 m^3 .

$$\left(\frac{dM}{dt} = 6.01 \times 10^{-5} \text{ kg/s}, \frac{d\rho}{dt} = 3.00 \times 10^{-3} \text{ kg/(m}^3\text{s)}\right).$$

Exercise 4.3 Un getto d'acqua ($\rho = 999 \text{ kg/m}^3$) stazionario, piano e orizzontale viene indirizzato su un cilindro, lambendone la superficie e venendo deviato di un angolo $\alpha = 15^\circ$. Determinare la forza agente su una porzione del cilindro di lunghezza pari a $H = 2 \text{ m}$, dovuta sia al getto d'acqua, sia all'aria circostante, sapendo che: \begin{itemize} \item il fluido che circonda il getto e il cilindro è aria in quiete a pressione atmosferica di 101325 Pa ; \item la larghezza del getto è $h = 2 \text{ cm}$; \item la portata d'acqua per unità di lunghezza nel getto è $Q = 199 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. \end{itemize} Sufficientemente lontano dal cilindro, il profilo di velocità sulle sezioni del getto è uniforme. Illustrare tutte le ipotesi semplificative adottate nella risoluzione dell'esercizio.

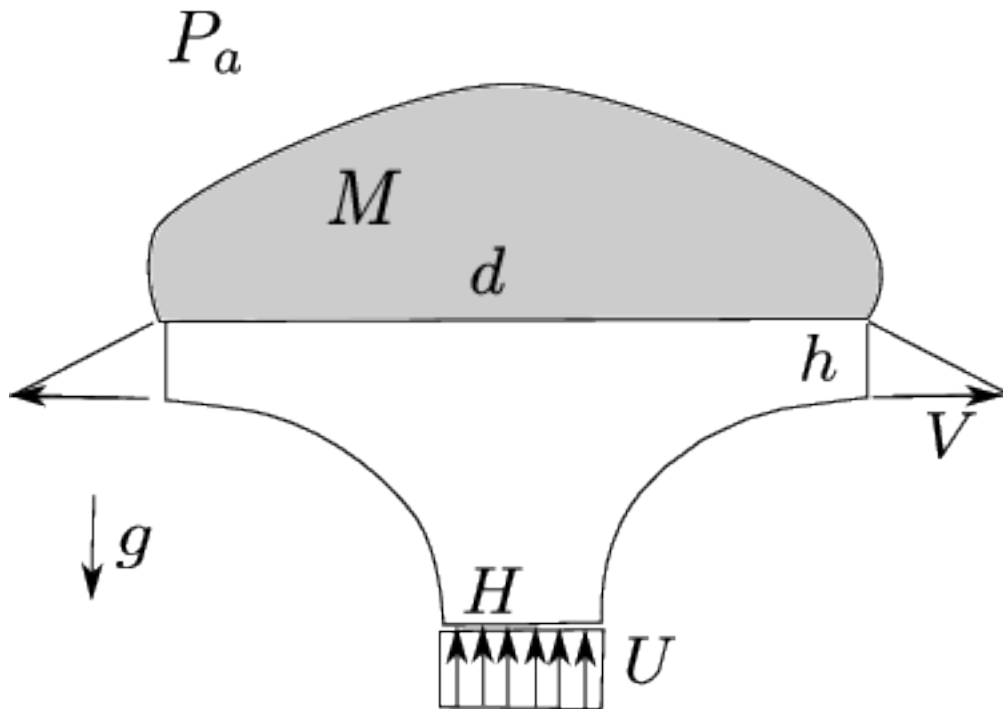
$$(\mathbf{F} = 1026 \hat{\mathbf{x}} - 135 \hat{\mathbf{y}} \text{ N})$$



Exercise 4.4 Un getto d'acqua ($\rho = 999 \text{ kg/m}^3$) stazionario, piano e verticale viene indirizzato su un oggetto di massa M , tenuto da esso in equilibrio. Il getto ha distribuzione di velocità uniforme U lungo lo spessore H , mentre la distribuzione sul bordo dell'oggetto è triangolare di spessore h con velocità massima V . Si calcoli la velocità V e la massa M dell'oggetto supponendo che:

- il fluido che circonda il getto e il solido è aria in quiete a pressione atmosferica di $P_a = 101325 \text{ Pa}$;
- si possa trascurare la gravità nel bilancio di quantità di moto, ma non nell'equilibrio del corpo.

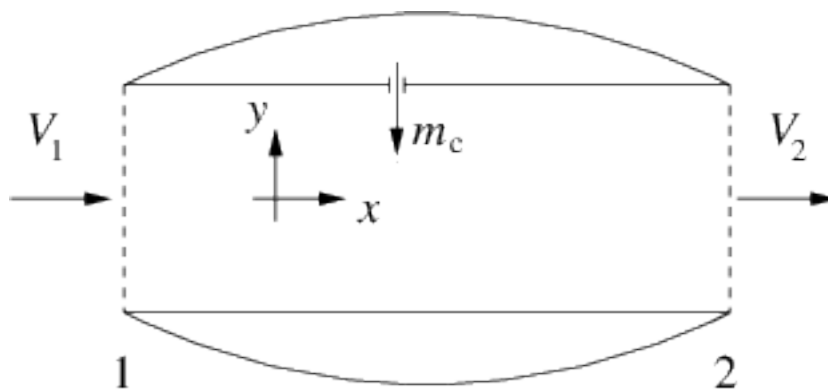
$$(V = UH/h; M = \rho U^2 H/g)$$



Exercise 4.5 Il motore a getto in figura è alimentato con una portata $\dot{m}_c = 1.1 \text{ kg/s}$ di carburante liquido iniettato in direzione ortogonale all'asse del motore. Calcolare la spinta T del motore ipotizzando che:

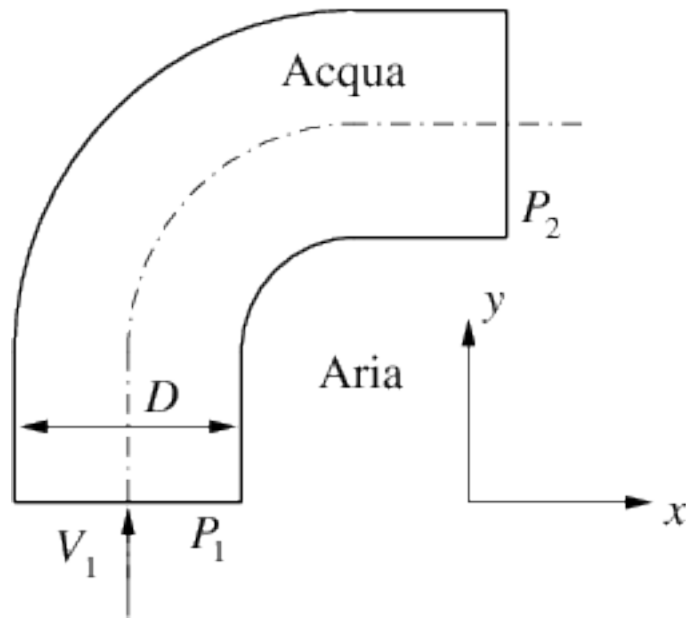
- il carburante vaporizzi e diffonda completamente;
- le sezioni di ingresso e uscita abbiano area uguale e pari ad $A = 0.5 \text{ m}^2$;
- sia l'aria in ingresso che i gas di scarico siano a pressione atmosferica $P_{atm} = 26400 \text{ Pa}$;
- la velocità di ingresso e di uscita siano uniformi sulle rispettive sezioni;
- siano note la densità dell'aria in ingresso $\rho_1 = 0.42 \text{ kg/m}^3$, la velocità di ingresso $V_1 = 240 \text{ m/s}$ e la velocità di efflusso $V_2 = 980 \text{ m/s}$.

($T = -38374\hat{x} \text{ N}$)



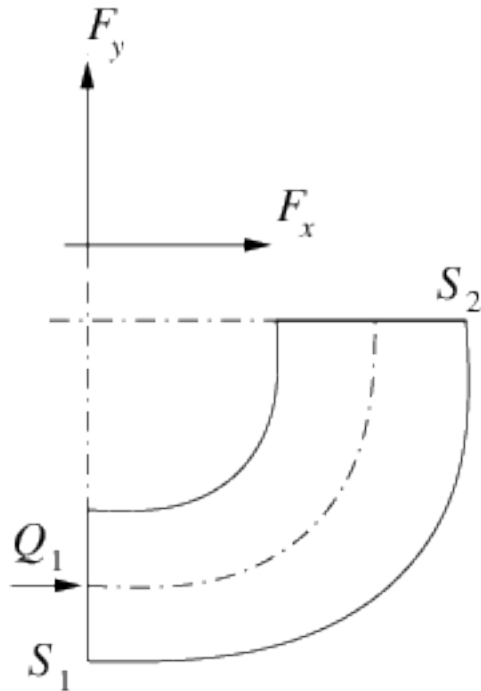
Exercise 4.6 Un condotto di sezione circolare avente diametro $D = 5 \text{ cm}$ forma un gomito con angolo di 90° . Nel condotto scorre acqua ($\rho = 999 \text{ kg/m}^3$) in regime stazionario con velocità $V = 0.5 \text{ mm/s}$. All'esterno del condotto vi è atmosfera con pressione uniforme $P_{atm} = 101325 \text{ Pa}$; inoltre le pressioni all'ingresso e all'uscita del gomito sono uniformi sulla sezione ed entrambe pari a $P = 10^6 \text{ Pa}$. Calcolare la forza \mathbf{F} agente sul gomito.

($\mathbf{F} = -1765.03\hat{x} + 1765.03\hat{y} \text{ N}$)



Exercise 4.7 Si consideri la corrente stazionaria nel gomito a 90° di una galleria a vento a circuito chiuso di cui è mostrata in figura la sezione nel piano x - y . Siano assegnate le aree della sezione di ingresso, $S_1 = 16 \text{ m}^2$, e di uscita, $S_2 = 56 \text{ m}^2$, la portata in volume $Q_1 = 1600 \text{ m}^3/\text{s}$ e le pressioni nella sezione di ingresso, $P_1 = 1.05 \text{ bar}$, e nella sezione di uscita, $P_2 = 1.106 \text{ bar}$. Assumendo che il flusso d'aria sia incomprimibile ($\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$) e che la velocità sulle sezioni di ingresso e uscita possa ritenersi uniforme, si determinino le componenti F_x ed F_y della spinta che esso esercita sul gomito, usando la convenzione indicata in figura.

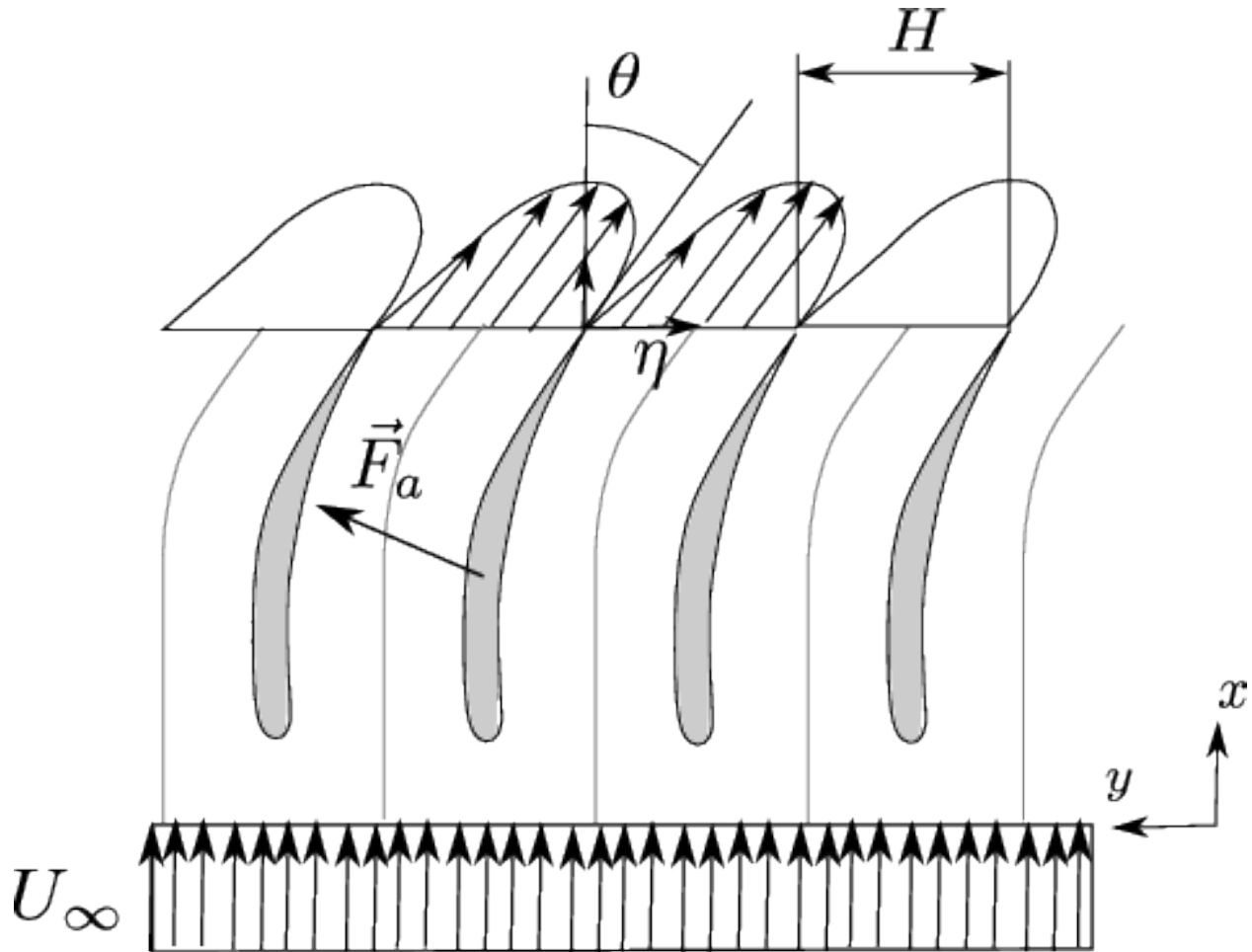
$$(F_x = 1.876 \cdot 10^6 \text{ N}, F_y = -6.251 \cdot 10^6 \text{ N})$$



Exercise 4.8 Un numero elevato di profili è disposto come in figura. Il profilo di ingresso è uniforme $\mathbf{u} = U_\infty \hat{\mathbf{x}}$, mentre il profilo di uscita ha andamento $\mathbf{u} = \beta U_\infty (\cos \theta \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta \hat{\mathbf{y}}) \sin \frac{\pi \eta}{H}$ in ogni canale (sia η la coordinata che descrive la sezione di uscita). Sulla sezione di ingresso la pressione media vale P_1 , sulla sezione di uscita P_2 .

Calcolare il fattore β del profilo di velocità in uscita e la risultante delle forze (per unità di apertura) agente sul singolo profilo.

(Risultati: $\beta = \frac{\pi}{2 \cos \theta}$, $\mathbf{F} = [(P_1 - P_2)H + \rho U^2 H((1 - \pi^2/8)]\hat{\mathbf{x}} + \pi^2/8 \tan \theta \hat{\mathbf{y}}$)

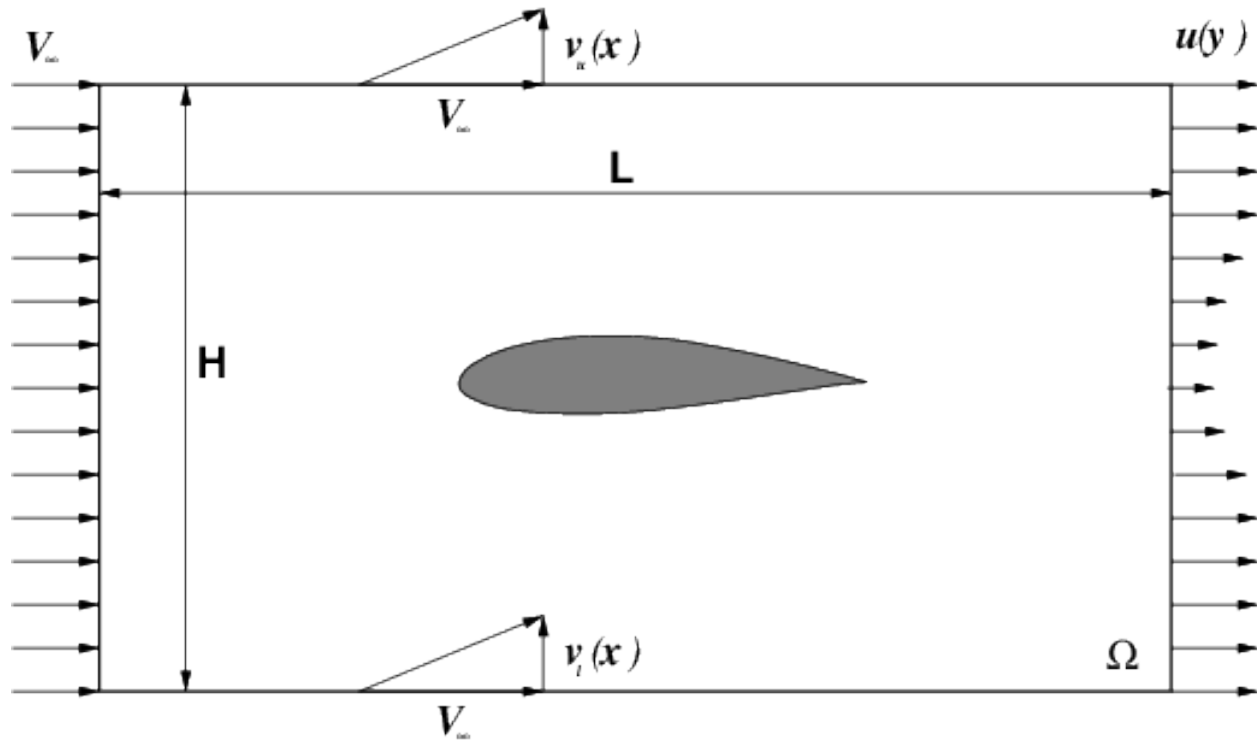


Exercise 4.9 Calcolare la resistenza di un profilo immerso in una corrente stazionaria con velocità asintotica \mathbf{V}_∞ , sapendo la distribuzione della componente di velocità $u(y)$ parallela a \mathbf{V}_∞ a valle del profilo e assumendo che:

- la pressione statica sul contorno del volume di controllo sia costante e pari a quella della corrente indisturbata a monte del profilo;
- sul lato superiore e inferiore del volume di controllo sia possibile trascurare la componente lungo l'asse x della perturbazione della velocità dovuta alla presenza del profilo:

$$\mathbf{V} = (V_\infty + u, v) \simeq (V_\infty, v).$$

$$(R = \int_0^H \rho u(y)[V_\infty - u(y)]dy.)$$

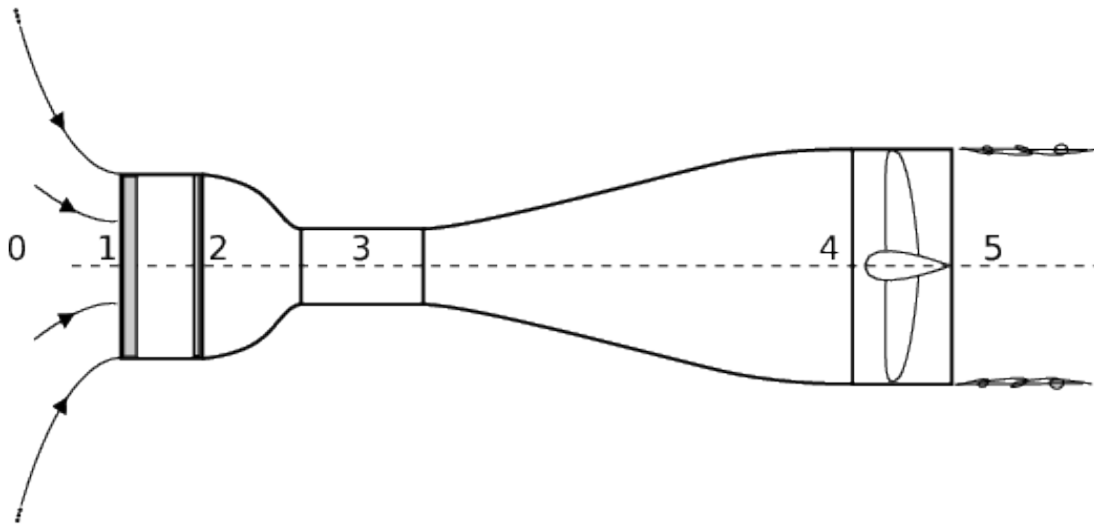


Exercise 4.10 Viene dato l'irrigatore rappresentato in figura, del quale sono note le sue dimensioni geometriche, R_0 , R_1 , ℓ , h . L'irrigatore è libero di ruotare attorno all'asse z . Si conosce la densità del fluido ρ e la velocità "di ingresso" U_0 uniforme sulla sezione S_0 . Supponendo

- la pressione uniforme sulle sezioni S_0 , S_1 , S_2 e uguale alla pressione atmosferica dell'aria attorno all'irrigatore
- la velocità relativa rispetto al moto dell'irrigatore uniforme sulle sezioni S_1 , S_2 ,
- gli effetti gravitazionali trascurabili

viene chiesto di calcolare la velocità V e la velocità di rotazione dell'irrigatore Ω , a regime.

Exercise 4.11 Viene chiesto di determinare la potenza dei motori della galleria a circuito aperto rappresentata in figura, sapendo che la velocità massima desiderata nella sezione di prova è $V_{test} = 30 \text{ m/s}$, l'area della sezione di prova è $A_{test} = 1.0 \text{ m}^2$ e l'area della sezione in cui è alloggiato il ventilatore che mette in moto l'aria è $A_{fan} = 2.0 \text{ m}^2$. Si supponga che la corrente sia incomprimibile e che la densità dell'aria sia $\rho = 1.1 \text{ kg/m}^3$. In una prima fase, si trascuri la caduta di pressione attraverso il nido d'ape e gli schermi presenti tra la sezione 1 e la sezione 2 del condotto. Successivamente si ripeta il calcolo con una caduta di pressione $P_1 - P_2 = k\rho U^2$, con $k = \dots$



Exercise 4.12 Il funzionamento di un motore alternativo a benzina (a quattro tempi) può essere rappresentato in prima approssimazione con un ciclo termodinamico Otto ideale, rappresentato da una compressione adiabatica, una fase veloce di combustione a volume costante (nel punto morto superiore del moto del pistone, PMS) e un'espansione adiabatica. Le fasi di aspirazione e scarico dei gas combusti sono anch'essi ideali. L'aspirazione avviene a pressione costante durante il movimento del pistone dal PMS al punto morto inferiore (PMI). La fase di scarico avviene in due fasi: durante la prima fase la pressione diminuisce molto velocemente (approssimata da una trasformazione a volume costante) a causa dell'apertura della valvola di scarico quando il pistone si trova al PMI; durante la seconda fase i gas combusti sono spinti fuori dalla camera di combustione dal movimento ascendente del pistone che si riporta al PMS, per l'inizio del ciclo termodinamico successivo. Del motore sono noti:

- il rapporto di compressione, definito come il rapporto tra il volume massimo (pistone al PMI) e minimo (pistone al PMS) della camera di combustione, $r = V_1/V_2 = 10$;
- la cilindrata, definita come la corsa del pistone per l'area della sezione del cilindro, e uguale alla differenza $C = N(V_2 - V_1) = 1000 \text{ cc}$, essendo N il numero di cilindri del motore;
- le condizioni termodinamiche dell'aria all'aspirazione $P_0 = 85570 \text{ Pa}$, $T_0 = 25^\circ\text{C}$;
- il rapporto in massa tra benzina e aria, $f = m_f/m_a = 0.06$;
- il potere calorifico della benzina usata $\Delta h = 43 \text{ MJ}$;
- la pressione nel basamento del motore, $p_b = 150000 \text{ Pa}$ uniforme e costante.

Si calcoli la potenza media erogata dal motore a un regime di rotazione di $\Omega = 3000 \text{ RPM}$, assumendo un rendimento meccanico $\eta = 0.8$. Si rappresenti l'aria come un gas bi-atomico perfetto ($\gamma = c_p/c_v = 1.4$) con costante dei gas $R = 287 \text{ J/(kg K)}$, e si trascuri l'effetto del carburante sul valore dei calori specifici e sulla massa presente all'interno della camera di combustione. Si trascurino inoltre gli scambi di calore per conduzione con l'esterno del cilindro durante la compressione e l'espansione (trasformazioni adiabatiche). Si trascurino i termini cinetici nell'energia totale in camera di combustione, facendo coincidere l'energia totale con l'energia interna $e^t = e = c_v T$, e si assuma che le variabili termodinamiche siano uniformi (costanti in spazio, non in tempo) in camera di combustione.

Exercise 4.13 Un aereo vola alla velocità $V = 250 \text{ m/s}$ alla quota $z = 10000 \text{ m}$, dove la pressione e la temperatura atmosferica sono $P_0 = 26500 \text{ Pa}$ e $T_0 = 223.25 \text{ K}$, spinto dal motore a getto rappresentato in figura. Sapendo che:

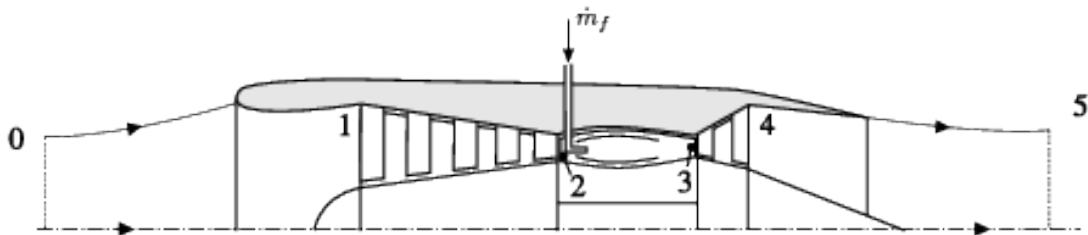
- $0 \rightarrow 1$: la presa d'aria è progettata per ottenere una compressione adiabatica ideale (isentropica), con $P_1/P_0 = 1.5$;
- $1 \rightarrow 2$: il compressore ideale ha una sezione di ingresso $A_1 = \dots$ e produce un rapporto di pressione totale $P_2^t/P_1^t = 40.0$, tramite una trasformazione adiabatica ideale;

- 2 → 3: il combustore garantisce una perfetta combustione mantenendo costante la pressione totale al suo interno $P_2^t = P_3^t$; il flusso di calore prodotto dalla combustione è uguale a $\dot{Q}_c = \dot{m}_f \Delta h_c$, dove \dot{m}_f è il flusso di massa di combustibile e $\Delta h_c = 46 \text{ MJ/kg}$ il suo potere calorifico; la temperatura totale all'ingresso della turbina è $T_4^t = 1600 \text{ K}$;
- 3 → 4: nella turbina avviene un'espansione adiabatica ideale, in modo tale da garantire la potenza necessaria a mantenere in moto il compressore;
- 4 → 5: nell'ugello avviene un'espansione adiabatica ideale, che porta il gas a espandersi fino alla pressione ambiente $P_5 = P_0$.

Si considerino tutti i componenti meccanici ideali, si trascurino gli effetti viscosi dove possibile e si consideri l'aria e la miscela di gas combusti come un gas biatomico ideale, con costante dei gas $R = 287 \text{ J/(kg K)}$ e calori specifici costanti.

Viene chiesto di calcolare:

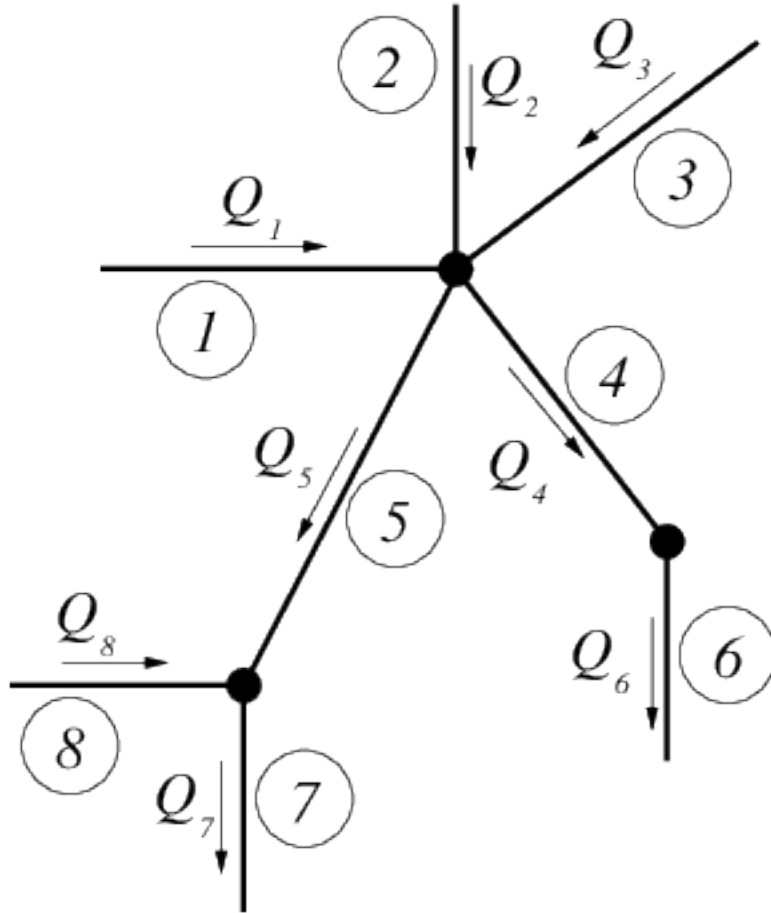
- il rapporto in massa tra flusso di combustibile e flusso di aria, $f = \dot{m}_f / \dot{m}_a$;
- la spinta T fornita dal motore.



4.20.1 Exercise 4.1

Exercise 4.1 Si consideri una rete idraulica come quella rappresentata in figura. All'interno dei tubi scorre acqua. Sia nota le velocità media dell'acqua all'interno di alcuni dei rami della rete: $U_1 = 1 \text{ m/s}$, $U_2 = 1.5 \text{ m/s}$, $U_3 = 0.5 \text{ m/s}$, $U_7 = 2 \text{ m/s}$ e $U_8 = 0.3 \text{ m/s}$. Il verso della velocità è indicato dalle frecce sul disegno. Determinare la portata volumetrica, la portata in massa e la velocità media all'interno di ciascun ramo della rete sapendo che l'acqua ha una densità pari a $\bar{\rho} = 999 \text{ kg/m}^3$, e che il diametro dei tubi è rispettivamente $D_1 = 0.4 \text{ m}$, $D_2 = 0.2 \text{ m}$, $D_3 = 0.2 \text{ m}$, $D_4 = 0.3 \text{ m}$, $D_5 = 0.5 \text{ m}$, $D_6 = 0.25 \text{ m}$, $D_7 = 0.3 \text{ m}$, $D_8 = 0.6 \text{ m}$.

($Q_1 = 0.13 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_2 = 0.05 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_3 = 0.02 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_4 = 0.13 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_5 = 0.06 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_6 = 0.13 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_7 = 0.14 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_8 = 0.08 \text{ m}^3/\text{s}$, $U_1 = 1 \text{ m/s}$, $U_2 = 1.5 \text{ m/s}$, $U_3 = 0.5 \text{ m/s}$, $U_4 = 1.87 \text{ m/s}$, $U_5 = 0.29 \text{ m/s}$, $U_6 = 2.69 \text{ m/s}$, $U_7 = 2 \text{ m/s}$, $U_8 = 0.3 \text{ m/s}$, $\bar{Q}_1 = 125.5 \text{ kg/s}$, $\bar{Q}_2 = 47.08 \text{ kg/s}$, $\bar{Q}_3 = 15.69 \text{ kg/s}$, $\bar{Q}_4 = 131.8 \text{ kg/s}$, $\bar{Q}_5 = 54.49 \text{ kg/s}$, $\bar{Q}_6 = 131.8 \text{ kg/s}$, $\bar{Q}_7 = 141.2 \text{ kg/s}$, $\bar{Q}_8 = 84.74 \text{ kg/s}$)



Concetti. Bilancio integrale della massa. Teoria delle reti: bilancio ai nodi.

Svolgimento. Se il regime di moto è stazionario, la portata massica è costante e indipendente dalla sezione considerata all'interno di ogni singolo tubo. Il bilancio di massa nell' i -esimo tubo è,

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_i} \rho}_{=0} = \oint_{S_i} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_{i,\alpha}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{S_{i,\beta}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \tilde{Q}_{i,\alpha} + \tilde{Q}_{i,\beta} \rightarrow \tilde{Q}_{i,\alpha} = -\tilde{Q}_{i,\beta},$$

avendo indicato $S_{i,\alpha}$ e $S_{i,\beta}$ le due sezioni in «ingresso» e «uscita» del tubo V_i , con $\hat{\mathbf{n}}$, \tilde{Q}_α e \tilde{Q}_β la normale uscente e i flussi di massa uscenti dal volume V_i . Se si calcola il flusso di massa \bar{Q}_i attraverso le sezioni del tubo con normale identificata dal «verso di percorrenza» del tubo, uno dei due termini cambia segno e si dimostra che la portata è costante sulle sezioni del singolo tubo,

$$\bar{Q}_{i,\alpha} = \bar{Q}_{i,\beta} =: \bar{Q}_i.$$

Utilizzando il verso delle frecce indicato in figura per stabilire il segno dei flussi di massa, il bilancio di massa ai nodi porta al sistema lineare,

$$\begin{cases} \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + \bar{Q}_3 - \bar{Q}_4 - \bar{Q}_5 = 0 & \text{(bil. al nodo in alto)} \\ \bar{Q}_5 + \bar{Q}_8 - \bar{Q}_7 = 0 & \text{(bil. al nodo a sinistra)} \\ \bar{Q}_4 - \bar{Q}_6 = 0 & \text{(bil. al nodo a destra),} \end{cases}$$

nel quale le incognite sono i flussi \bar{Q}_4 , \bar{Q}_5 , \bar{Q}_6 , una volta calcolati gli altri flussi con i dati forniti dal testo del problema, $\bar{Q}_k = \rho \frac{\pi}{4} D_k^2 U_k$, $k = 1, 2, 3, 7, 8$. Successivamente si calcolano le portate volumetriche Q_k incognite, dividendo le

portate massiche \bar{Q}_k per la densità ρ ,

$$Q_k = \frac{\bar{Q}_k}{\rho}, \quad k = 1 : 8.$$

4.20.2 Exercise 4.2

Exercise 4.2 Si sta riempiendo una bombola per immersioni subacquee. Sapendo che la pompa aspira aria a pressione ambiente di $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ e alla temperatura di 293 K in un condotto di sezione 1 cm^2 in cui la velocità media è di 0.5 m/s e che non ci sono perdite nel sistema di pompaggio, determinare la rapidità di variazione della massa d'aria e della sua densità all'interno della bombola, sapendo che il volume della bombola è pari a 0.02 m^3 .

$$\left(\frac{dM}{dt} = 6.01 \times 10^{-5} \text{ kg/s}, \frac{d\rho}{dt} = 3.00 \times 10^{-3} \text{ kg/(m}^3\text{s)}\right).$$

Concetti. Bilancio integrale della massa. Legge dei gas perfetti.

Svolgimento. Sono date la pressione p e la temperatura T all'uscita della pompa. È nota l'area S della sezione e la velocità media U su quella sezione. Si trova la variazione di massa all'interno della bombola grazie al bilancio integrale di massa nel volume della bombola V (volume di controllo, fisso),

$$\rho_{in} = \frac{P_{in}}{RT_{in}},$$

dove $R = 287 \text{ J/(kg K)}$ è la costante dei gas per l'aria. La derivata nel tempo della massa d'aria nella bombola vale quindi

$$\frac{dM}{dt} = 6.0 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

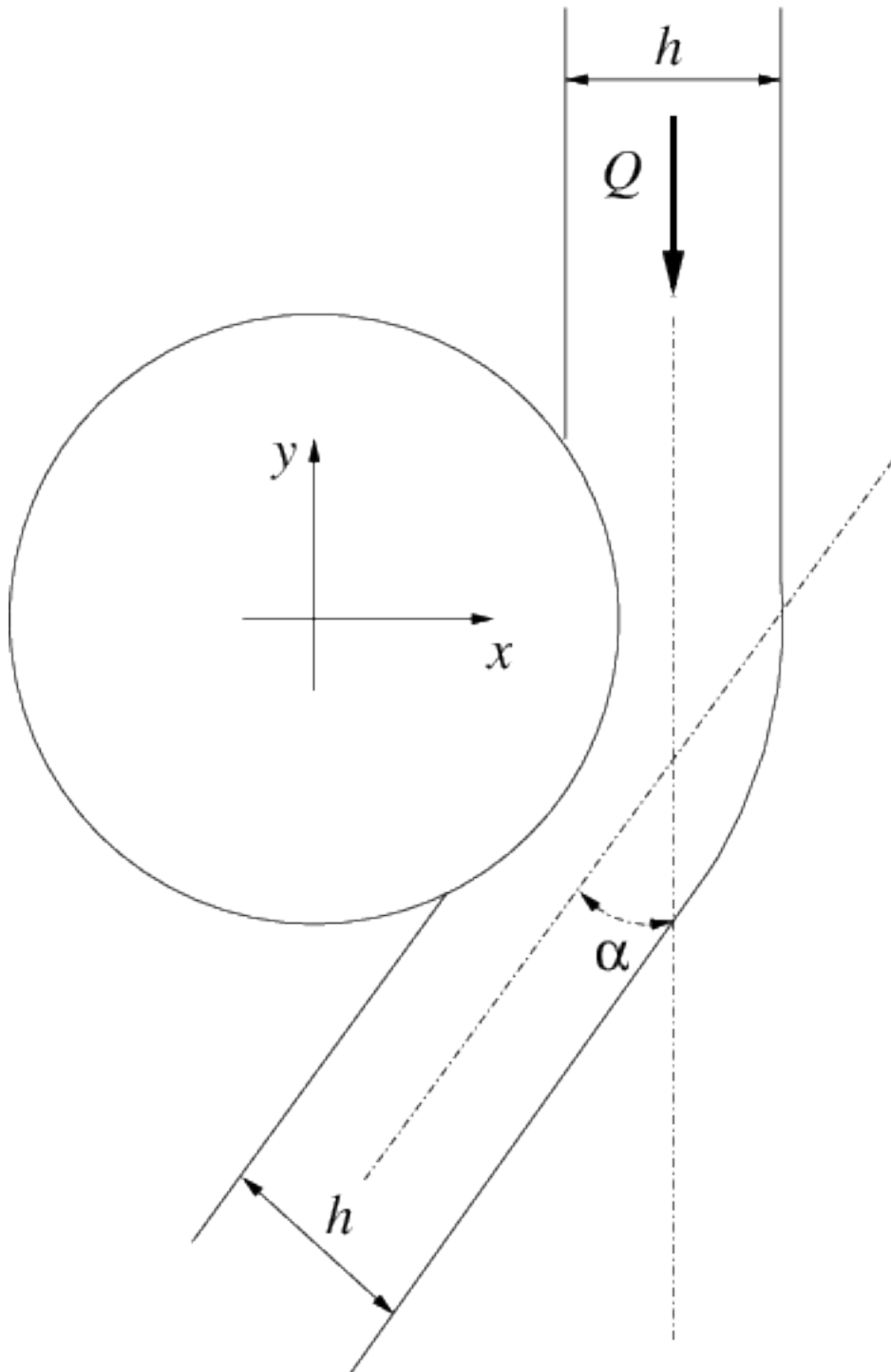
Supponendo che la densità dell'aria si uniforme all'interno della bombola, si può calcolare la sua derivata nel tempo,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{V} \frac{d}{dt} \int_V \rho = 2.0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3\text{s}}.$$

4.20.3 Exercise 4.3

Exercise 4.3 Un getto d'acqua ($\rho = 999 \text{ kg/m}^3$) stazionario, piano e orizzontale viene indirizzato su un cilindro, lambendone la superficie e venendo deviato di un angolo $\alpha = 15^\circ$. Determinare la forza agente su una porzione del cilindro di lunghezza pari a $H = 2 \text{ m}$, dovuta sia al getto d'acqua, sia all'aria circostante, sapendo che: \begin{itemize} \item il fluido che circonda il getto e il cilindro è aria in quiete a pressione atmosferica di 101325 Pa ; \item la larghezza del getto è $h = 2 \text{ cm}$; \item la portata d'acqua per unità di lunghezza nel getto è $Q = 199 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. \end{itemize} Sufficientemente lontano dal cilindro, il profilo di velocità sulle sezioni del getto è uniforme. Illustrare tutte le ipotesi semplificative adottate nella risoluzione dell'esercizio.

$$(\mathbf{F} = 1026 \hat{\mathbf{x}} - 135 \hat{\mathbf{y}} \text{ N})$$



Concetti. Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo. Effetto Coanda (esempio della bustina da té sotto il rubinetto).

Svolgimento. Vengono fatte alcune ipotesi: il problema stazionario; attorno al getto e al solido, l'aria è in quiete con pressione uniforme p_a ; il profilo di velocità è uniforme sulle sezioni del getto considerate nelle equazioni di bilancio.

Partendo dalle equazioni di bilancio per il volume di controllo V_f occupato dal fluido, rielaborando il termine degli sforzi di superficie, si ricava la risultante \mathbf{R} agente sul solido in funzione del flusso di quantità di moto del

fluido attraverso la superficie $S_f = \partial V_f$.

Innanzitutto viene ricavata l'espressione della risultante \mathbf{R} agente sul solido.

- Vengono scritte le equazioni di bilancio per il fluido, considerando il volume V_f

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho + \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho \mathbf{u} + \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_f} \mathbf{t}_n = 0 & \text{(quantità di moto)} \end{cases}$$

- Viene introdotta l'ipotesi di stazionarietà del fenomeno, $\frac{d}{dt} \equiv 0$. La risultante degli sforzi viene scritta come somma degli sforzi di pressione e degli sforzi viscosi,

$$\oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_f} \mathbf{t}_n = \oint_{S_f} \mathbf{s}_n - \oint_{S_f} p \hat{\mathbf{n}}.$$

- Viene manipolato il termine degli sforzi di superficie. Il contorno S_f del volume fluido viene scomposto come unione della superficie a contatto con il solido S_{fs} , delle superfici «laterali» $S_{f\ell}$ (attraverso le quali non c'è flusso di quantità meccaniche, poichè $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$) a contatto con l'aria in quiete e le sezioni «di ingresso» $S_{f,1}$ e «di uscita» $S_{f,2}$ sulle quali la velocità è uniforme, utilizzate per i bilanci integrali per il volume fluido. Viene indicata con $\hat{\mathbf{n}}_f$ la normale uscente dal volume V_f . Il contorno S_s del solido viene scomposto come unione della superficie a contatto con il fluido S_{sf} e della superficie $S_{s\ell}$ a contatto con l'aria in quiete. Viene indicata con $\hat{\mathbf{n}}_s$ la normale uscente dal volume V_s . In questo modo, la superficie S_{fs} coincide con la superficie S_{sf} , a meno della normale invertita, $\hat{\mathbf{n}}_f = -\hat{\mathbf{n}}_s$. Su queste superfici, per il terzo principio della dinamica, lo sforzo $\mathbf{t}_{n_{sf}}$ agente sul solido dovuto al fluido è uguale e contrario allo sforzo $\mathbf{t}_{n_{fs}}$ agente sul fluido dovuto al fluido, $\mathbf{t}_{n_{sf}} = -\mathbf{t}_{n_{fs}}$. La superficie formata dall'unione $S_{f\ell} \cup S_{f,1} \cup S_{f,2} \cup S_{s\ell} =: S_{ext}$ è una superficie chiusa con normale uscente $\hat{\mathbf{n}}$ uguale a $\hat{\mathbf{n}}_f$ sulle prime tre superfici e uguale a $\hat{\mathbf{n}}$ su $S_{s\ell}$. Lo sforzo agente su S_{ext} è uguale a $-p_a \hat{\mathbf{n}}$, poiché le superfici libere sono a contatto con aria in quiete con pressione p_a e le traiettorie delle particelle rettilinee (senza curvatura¹) sulle sezioni $S_{f,1}$ e $S_{f,2}$.

$$\begin{aligned} \oint_{S_f} \mathbf{t}_n &= \int_{S_{f\ell}} \mathbf{t}_n + \int_{S_{f,1+2}} \mathbf{t}_n + \int_{S_{fs}} \mathbf{t}_n = & (\mathbf{t}_n|_{S_{f\ell}, S_{f,1+2}} = -p_a \hat{\mathbf{n}}_f) \\ &= - \int_{S_{f\ell} \cup S_{f,1+2}} p_a \hat{\mathbf{n}}_f + \int_{S_{fs}} \mathbf{t}_n = & \text{(somma e sottrazione di } \int_{S_{fs}} p_a \hat{\mathbf{n}}_f) \\ &= - \underbrace{\int_{S_{f\ell} \cup S_{f,1+2}} p_a \hat{\mathbf{n}}_f - \int_{S_{fs}} p_a \hat{\mathbf{n}}_f}_{-\oint_{S_f} p_a \hat{\mathbf{n}}_f = 0} + \int_{S_{fs}} p_a \hat{\mathbf{n}}_f + \int_{S_{fs}} \mathbf{t}_n = & (\hat{\mathbf{n}}_f = -\hat{\mathbf{n}}_s, \mathbf{t}_{n_{fs}} = -\mathbf{t}_{n_{sf}} \text{ su } S_{fs}) \\ &= - \int_{S_{sf}} p_a \hat{\mathbf{n}}_s - \int_{S_{sf}} \mathbf{t}_{n_{sf}} = & (\oint_{S_s = S_{sf} \cup S_{s\ell}} p_a \hat{\mathbf{n}}_s = 0) \\ &= + \int_{S_{s\ell}} p_a \hat{\mathbf{n}}_s - \int_{S_{sf}} \mathbf{t}_{n_{sf}} = & (\mathbf{t}_{n_s} = -p_a \hat{\mathbf{n}}_s \text{ su } S_{s\ell}) \\ &= - \int_{S_{s\ell}} \mathbf{t}_{n_s} - \int_{S_{sf}} \mathbf{t}_{n_{sf}} = - \oint_{S_s} \mathbf{t}_{n_s} = \\ &= -\mathbf{R}, \end{aligned}$$

dove \mathbf{R} è la risultante degli sforzi di superficie agente sul solido. In questo esercizio è il contributo delle forze di volume (ad esempio il peso) agenti sul solido.

- Sostituendo nell'equazione del bilancio della quantità di moto si ottiene: $\mathbf{R} = - \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}$

¹ Vedi commento sull'equazione della quantità di moto e sulle traiettorie delle particelle

- Considerando solo le superfici di V_f attraverso le quali c'è un flusso non nullo di quantità di moto, la risultante delle forze diventa

$$\mathbf{R} = - \int_{S_{f,1}} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_{S_{f,2}} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

dove le quantità all'interno degli integrali sono riferite alle superfici di integrazione. Sulle sezioni $S_{f,1}$, $S_{f,2}$ la velocità è uniforme con modulo U (dalla continuità, la velocità sulle due sezioni è uguale poichè l'area delle due sezioni è uguale) diretta lungo la linea media del getto. Le componenti cartesiane della risultante \mathbf{R} sono

$$R_x = \frac{Q^2 H}{\rho h} \sin \alpha$$

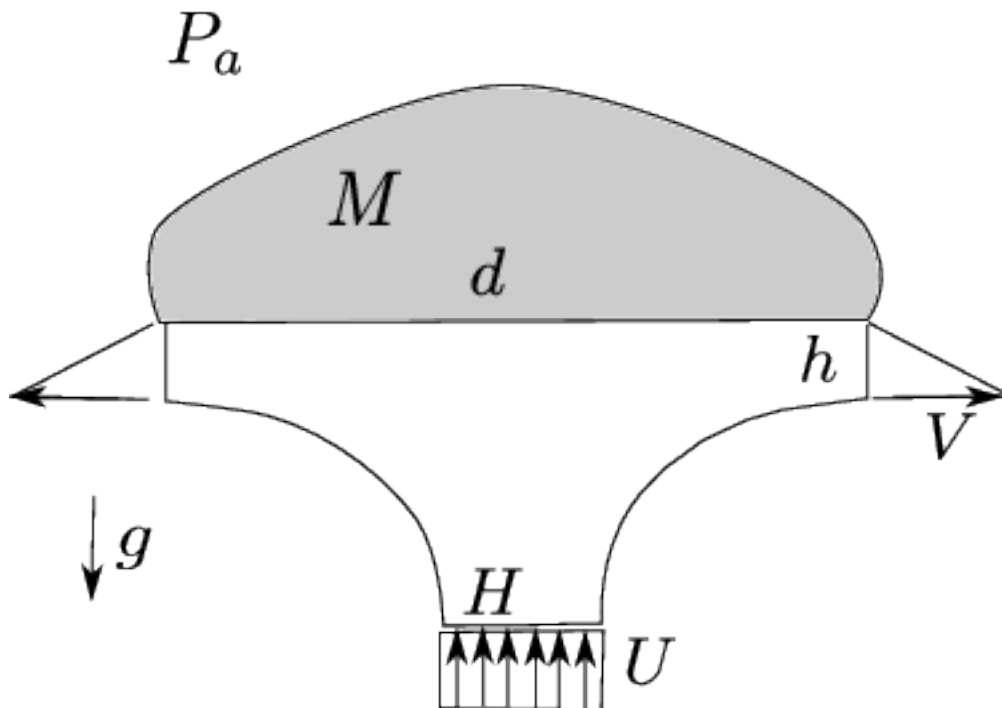
$$R_y = -\frac{Q^2 H}{\rho h} (1 - \cos \alpha),$$

riferite agli assi rappresentati in figura.

4.20.4 Exercise 4.4

Exercise 4.4 Un getto d'acqua ($\rho = 999 \text{ kg/m}^3$) stazionario, piano e verticale viene indirizzato su un oggetto di massa M , tenuto da esso in equilibrio. Il getto ha distribuzione di velocità uniforme U lungo lo spessore H , mentre la distribuzione sul bordo dell'oggetto è triangolare di spessore h con velocità massima V . Si calcoli la velocità V e la massa M dell'oggetto supponendo che: \begin{itemize} \item il fluido che circonda il getto e il solido è aria in quiete a pressione atmosferica di $P_a = 101325 \text{ Pa}$; \item si possa trascurare la gravità nel bilancio di quantità di moto, ma non nell'equilibrio del corpo. \end{itemize}

$$(V = UH/h; M = \rho U^2 H/g)$$



Concetti. Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo.

Svolgimento. Ipotesi: problema stazionario; sulla superficie libera del corpo e del fluido agisce solo la pressione ambiente p_a ; nessun effetto della gravità nei bilanci del fluido.

Si sceglie un asse y diretto verso l'alto.

- Scrittura delle equazioni di bilancio per il fluido.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho + \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial\Omega} p \hat{\mathbf{n}} - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{s}_n - \int_V \rho \mathbf{g} = 0 & \text{(quantità di moto)} \end{cases}$$

A queste, va aggiunta l'equazione di equilibrio del corpo sottoposto alla forza di gravità: $\mathbf{F} + M\mathbf{g} = 0$.

- Dopo aver semplificato il bilancio di massa, da esso si ricava la velocità V . La velocità sui due bordi "di uscita" è $v(s) = Vs/h$, avendo chiamato s la coordinata che descrive tale superficie per valori compresi tra 0 e h .

$$0 = \int_{S_{in}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_{out1}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_{out2}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\rho UH + 2 \int_0^h \rho V \frac{s}{h} ds = \rho \left[-UH + 2 \frac{1}{2} Vh \right]$$

E quindi $V = U \frac{H}{h}$.

- Le equazioni vengono opportunamente semplificate secondo le ipotesi fatte (vengono eliminati i termini non stazionari e il termine contenente le forze di volume - gravità). Il bordo del dominio fluido $\partial\Omega$ viene indicato con S_f . I contributi di pressione e viscosi vengono raccolti nel «vettore di sforzo» complessivo.

$$\oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_f} \mathbf{s}_n - \oint_{S_f} p \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_f} \mathbf{t}_n$$

- Riscrittura del termine di contorno. Si indica con S_f il contorno fluido: questo è costituito dall'unione del contorno a contatto con il corpo S_c e quella «libera» S_l . Il contorno del corpo S_s è suddiviso nel contorno S_c a contatto con il fluido e nel contorno libero S_{c_l} .

Nei passaggi successivi si ricava il legame tra sforzi sul contorno del dominio fluido e la forza agente sul corpo. Si usano le ipotesi che sulle superfici libere agisca solo la pressione ambiente. Si usa il fatto che l'integrale di una quantità costante per la normale su una superficie chiusa è nullo. Vengono definite le normali \mathbf{n} e \mathbf{n}_s come la normale uscente dal volume del fluido e quella uscente dal solido. Si definiscono \mathbf{t}_n e \mathbf{t}_{n_s} come lo sforzo agente sul fluido e quello agente sul solido. Si usa infine il fatto che $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_s$ (normali uscenti dai due domini, uguali e contrarie) e $\mathbf{t}_n = -\mathbf{t}_{n_s}$ sulla superficie in comune (sforzi agenti sulla superficie comune, uguali e contrari; principio di azione e reazione).

$$\begin{aligned} \oint_{S_f} \mathbf{t}_n &= \int_{S_l} \mathbf{t}_n + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = && (\mathbf{t}_n|_{S_l} = -p_a \mathbf{n}) \\ &= - \int_{S_l} p_a \mathbf{n} + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = && \text{(somma e sottrazione di } \int_{S_c} p_a \mathbf{n}) \\ &= - \underbrace{\int_{S_l} p_a \mathbf{n} - \int_{S_c} p_a \mathbf{n}}_{=0} + \int_{S_c} p_a \mathbf{n} + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = && (\mathbf{n} = -\mathbf{n}_s) \\ &= - \int_{S_c} p_a \mathbf{n}_s + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = && (S_s = S_c \cup S_{c_l} \text{ e } \int_{S_s} p_a \mathbf{n} = 0) \\ &= \int_{S_{c_l}} p_a \mathbf{n}_s + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = && (\mathbf{t}_{n_s}|_{S_{c_l}} = -p_a \mathbf{n}_s, \mathbf{t}_{n_s}|_{S_c} = -\mathbf{t}_n) \\ &= - \int_{S_{c_l}} \mathbf{t}_{n_s} - \int_{S_c} \mathbf{t}_{n_s} = \\ &= - \int_{S_s} \mathbf{t}_{n_s} \\ &= -\mathbf{R} \end{aligned}$$

- Sostituendo nell'equazione del bilancio della quantità di moto si ottiene:

$$\mathbf{R} = - \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

- Data la simmetria del problema si riconosce che non ci può essere una componente orizzontale. I contributi nel bilancio della quantità di moto sulla superficie di contatto tra corpo e fluido e sulla superficie laterale del getto sono nulli poichè è nullo il flusso su tali superfici. I contributi sulle sezioni “di uscita” sono uguali e contrari. Rimane quindi solo il contributo dalla sezione “in ingresso”.

$$\mathbf{F} = - \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = - \oint_{S_{i,n}} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho U^2 H \hat{\mathbf{y}}$$

- Si scrive l'equilibrio del corpo $\mathbf{F} + M\mathbf{g} = 0$, con $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{y}}$. Da questo segue che $M = F/g = \frac{\rho U^2 H}{g}$.

Osservazioni. Nell'elaborazione dei termini della quantità di moto è contenuta la forma della risultante delle forze sull'oggetto vista in classe.

Come giustamente osservato da qualcuno in classe, la massa è per unità di lunghezza, poichè stiamo considerando un caso bidimensionale.

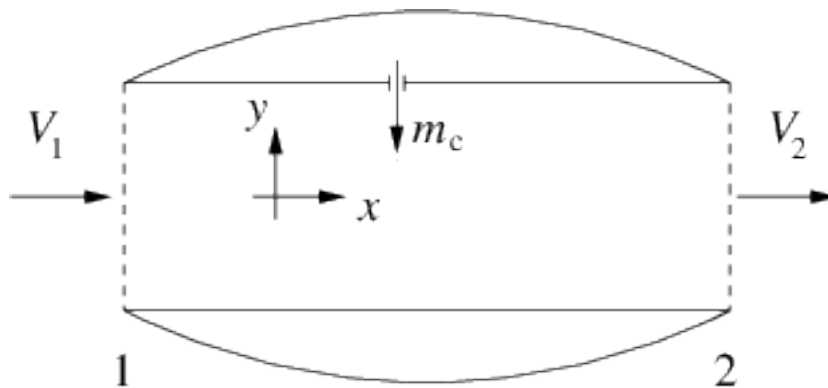
4.20.5 Exercise 4.5

Exercise 4.5 Il motore a getto in figura è alimentato con una portata $\dot{m}_c = 1.1 \text{ kg/s}$ di carburante liquido iniettato in direzione ortogonale all'asse del motore. Calcolare la spinta T del motore ipotizzando che:

- il carburante vaporizzi e diffonda completamente;
- le sezioni di ingresso e uscita abbiano area uguale e pari ad $A = 0.5 \text{ m}^2$;
- sia l'aria in ingresso che i gas di scarico siano a pressione atmosferica $P_{atm} = 26400 \text{ Pa}$;
- la velocità di ingresso e di uscita siano uniformi sulle rispettive sezioni;
- siano note la densità dell'aria in ingresso $\rho_1 = 0.42 \text{ kg/m}^3$, la velocità di ingresso $V_1 = 240 \text{ m/s}$ e la velocità di efflusso $V_2 = 980 \text{ m/s}$.

$$(T = \rho V_1 A (V_2 - V_1) + V_2 \dot{m}_c .)$$

$$(T = -38374 \hat{\mathbf{x}} \text{ N})$$



Concetti. Bilanci integrali di massa e quantità di moto.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_V \mathbf{f} - \oint_{\partial V} p \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial V} \mathbf{s}_n & \text{(quantità di moto)} \end{cases}$$

Svolgimento. Ipotesi: Regime stazionario. Fluido non viscoso (?). Profilo costante di velocità. No gravità.

- Scrittura dei bilanci integrali con le semplificazioni opportune, derivanti dalle ipotesi.

$$\begin{cases} \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n & \text{(quantità di moto)} \end{cases}$$

- Ulteriore semplificazione usando l'ipotesi di profili di velocità uniformi

$$\begin{cases} -\rho_1 V_1 A_1 - \dot{m}_c + \rho_2 V_2 A_2 = 0 \\ -\rho_1 \vec{V}_1 V_1 A_1 + \rho_2 \vec{V}_2 V_2 A_2 - \dot{m}_c \vec{v}_c = \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n \end{cases}$$

- Relazione tra l'integrale della pressione e la risultante delle forze agenti sul gomito, sfruttando il fatto che l'integrale della normale su tutta la superficie è identicamente nullo. Si identificano con S_1 la superficie di ingresso, S_2 la superficie di uscita, S_3 la superficie laterale interna del motore, S_{3_o} la superficie laterale esterna del motore.

$$\begin{aligned} \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n &= \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n + \underbrace{\oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} p_a \hat{\mathbf{n}}}_{=0} = \\ &= - \int_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \int_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_{3_o}} p_a \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_3} \mathbf{t}_n = \quad (p|_{S_1} = p|_{S_2} = p_a) \quad \$ \\ &= \int_{S_{3_o}} p_a \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_3} \mathbf{t}_n = \\ &= \oint_{S_{eng}} \mathbf{t}_n = -\vec{F} \end{aligned}$$

- L'equazione della quantità di moto diventa quindi:

$$-\rho_1 \vec{V}_1 V_1 A_1 + \rho_2 \vec{V}_2 V_2 A_2 - \dot{m}_c \vec{v}_c = -\vec{F}$$

- Mettendo a sistema l'equazione del bilancio di massa e la proiezione in direzione orizzontale dell'equazione della quantità di moto (si assume che l'iniezione del combustibile, e quindi \mathbf{v}_c , sia perpendicolare all'asse x e quindi non compare nel bilancio della quantità di moto in direzione x):

$$\begin{cases} \rho_2 V_2 A = \rho_1 V_1 A + \dot{m}_c \\ -\rho_1 V_1^2 A + \rho_2 V_2^2 A = -F_x \end{cases}$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} F_x &= \rho_1 V_1^2 A - \rho_2 V_2^2 A = \\ &= \rho_1 V_1^2 A - (\rho_2 V_2 A) V_2 = \\ &= \rho_1 V_1^2 A - V_2 (\rho_1 V_1 A + \dot{m}_c) = \\ &= \rho_1 V_1 A (V_1 - V_2) - V_2 \dot{m}_c \end{aligned}$$

E la spinta coincide con la componente lungo x appena calcolata:

$$T = \rho_1 V_1 A (V_2 - V_1) + V_2 \dot{m}_c$$

La spinta risulta quindi: $T = -F_x = 38374N$.

Interpretazione dei risultati e osservazioni.

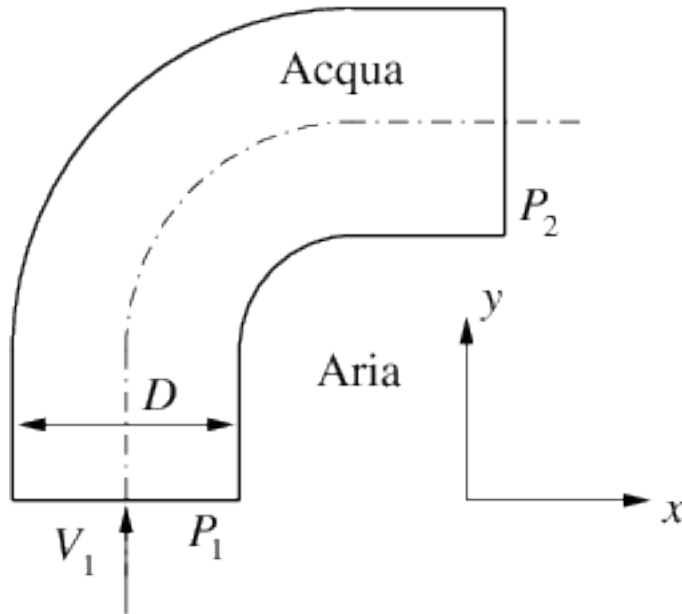
In prima approssimazione, la spinta in un motore a getto è una funzione della portata d'aria e della differenza di velocità tra ingresso e uscita. Spesso in molte applicazioni il termine \dot{m}_c è trascurabile.

Ragionare in questo caso sulla validità dell'approssimazione $\mathbf{t}_n = -p\hat{\mathbf{n}}$ nella definizione della risultante delle forze sul motore.

4.20.6 Exercise 4.6

Exercise 4.6 Un condotto di sezione circolare avente diametro $D = 5 \text{ cm}$ forma un gomito con angolo di 90° . Nel condotto scorre acqua ($\rho = 999 \text{ kg/m}^3$) in regime stazionario con velocità $V = 0.5 \text{ m/s}$. All'esterno del condotto vi è atmosfera con pressione uniforme $P_{atm} = 101325 \text{ Pa}$; inoltre le pressioni all'ingresso e all'uscita del gomito sono uniformi sulla sezione ed entrambe pari a $P = 10^6 \text{ Pa}$. Calcolare la forza \mathbf{F} agente sul gomito.

$$(\mathbf{F} = -1765.03\hat{x} + 1765.03\hat{y} \text{ N})$$



Concetti. Bilanci integrali di massa e quantità di moto. ...

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_V \mathbf{F} - \oint_{\partial V} p \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial V} \mathbf{s}_n & \text{(quantità di moto)} \end{cases}$$

Svolgimento. Vengono fatte alcune ipotesi: regime stazionario, fluido incomprimibile, fluido non viscoso, profili costanti di velocità, no gravità. Si scrivono i bilanci integrali semplificati, si riconoscono in essi e si calcolano le azioni scambiate con il corpo.

- Scrittura dei bilanci integrali opportunamente semplificati (ipotesi).

$$\begin{cases} \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n & \text{(quantità di moto)} \end{cases}$$

- Ulteriore semplificazione usando l'ipotesi di densità costante e profili di velocità uniformi

$$\begin{cases} -V_1 A_1 + V_2 A_2 = 0 & \Rightarrow V_1 = V_2 = V \\ -\rho \vec{V}_1 V_1 A_1 + \rho \vec{V}_2 V_2 A_2 = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n \end{cases}$$

- Relazione tra l'integrale degli sforzi sulla superficie e la risultante delle forze agenti sul gomito, sfruttando il fatto che l'integrale della normale su tutta la superficie è identicamente nullo. Si identificano con S_1 la superficie di ingresso,

S_2 la superficie di uscita, S_3 la superficie laterale.

$$\begin{aligned} \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n &= \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n + \underbrace{\oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} p_a \hat{\mathbf{n}}}_{=0} = \\ &= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} + \underbrace{\oint_{S_3} (\mathbf{t}_n + p_a \hat{\mathbf{n}})}_{=-\mathbf{F}} = \\ &= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{F} \end{aligned}$$

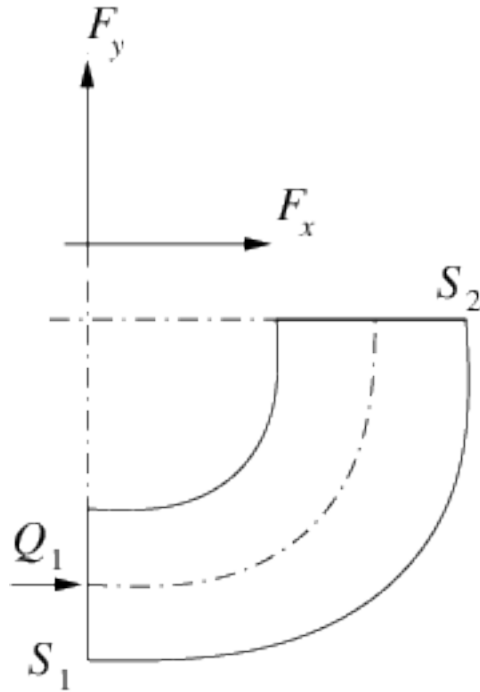
- Proiezione lungo i due assi del sistema di riferimento della risultante delle forze agenti sul gomito (dopo averla inserita nell'equazione di bilancio della quantità di moto)

$$\begin{cases} F_x = -\rho V^2 A - (p_2 - p_a) A \\ F_y = \rho V^2 A + (p_1 - p_a) A \end{cases}$$

4.20.7 Exercise 4.7

Exercise 4.7 Si consideri la corrente stazionaria nel gomito a 90° di una galleria a vento a circuito chiuso di cui è mostrata in figura la sezione nel piano x - y . Siano assegnate le aree della sezione di ingresso, $S_1 = 16 \text{ m}^2$, e di uscita, $S_2 = 56 \text{ m}^2$, la portata in volume $Q_1 = 1600 \text{ m}^3/\text{s}$ e le pressioni nella sezione di ingresso, $P_1 = 1.05 \text{ bar}$, e nella sezione di uscita, $P_2 = 1.106 \text{ bar}$. Assumendo che il flusso d'aria sia incomprimibile ($\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$) e che la velocità sulle sezioni di ingresso e uscita possa ritenersi uniforme, si determinino le componenti F_x ed F_y della spinta che esso esercita sul gomito, usando la convenzione indicata in figura.

$$(F_x = 1.876 \cdot 10^6 \text{ N}, F_y = -6.251 \cdot 10^6 \text{ N})$$



Concetti. Bilanci integrali di massa e quantità di moto.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_V \mathbf{f} - \oint_{\partial V} p \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial V} \mathbf{t}_s & \text{(quantità di moto)} \end{cases}$$

Svolgimento. Vengono fatte alcune ipotesi: regime stazionario, fluido incomprimibile, fluido non viscoso, profili costanti di velocità, no gravità. Si scrivono i bilanci integrali semplificati, si riconoscono in essi e si calcolano le azioni scambiate con il corpo.

- Scrittura dei bilanci integrali con le semplificazioni opportune, derivanti dalle ipotesi.

$$\begin{cases} \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n & \text{(quantità di moto)} \end{cases}$$

- Ulteriore semplificazione usando l'ipotesi di densità costante e profili di velocità uniformi

$$\begin{cases} -V_1 A_1 + V_2 A_2 = 0 & \Rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2 = Q \\ -\rho \vec{V}_1 V_1 A_1 + \rho \vec{V}_2 V_2 A_2 = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n \end{cases}$$

- Relazione tra l'integrale della pressione e la risultante delle forze agenti sul gomito, sfruttando il fatto che l'integrale della normale su tutta la superficie è identicamente nullo. Si identificano con S_1 la superficie di ingresso, S_2 la superficie di uscita, S_3 la superficie laterale.

$$\begin{aligned} \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} p \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n + \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} p_a \hat{\mathbf{n}} = \\ &= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} + \underbrace{\oint_{S_3} (\mathbf{t}_n + p_a \hat{\mathbf{n}})}_{= -\mathbf{f}} = \\ &= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{f} \end{aligned}$$

- L'equazione della quantità di moto diventa quindi:

$$-\rho \mathbf{V}_1 V_1 A_1 + \rho \mathbf{V}_2 V_2 A_2 = -(p_1 - p_a) A_1 \hat{\mathbf{n}}_1 - (p_2 - p_a) A_2 \hat{\mathbf{n}}_2 - \mathbf{F}$$

- Proiezione lungo i due assi del sistema di riferimento della risultante delle forze agenti sul gomito. Se si considera $p_a = 0$, i risultati numerici sono i seguenti:

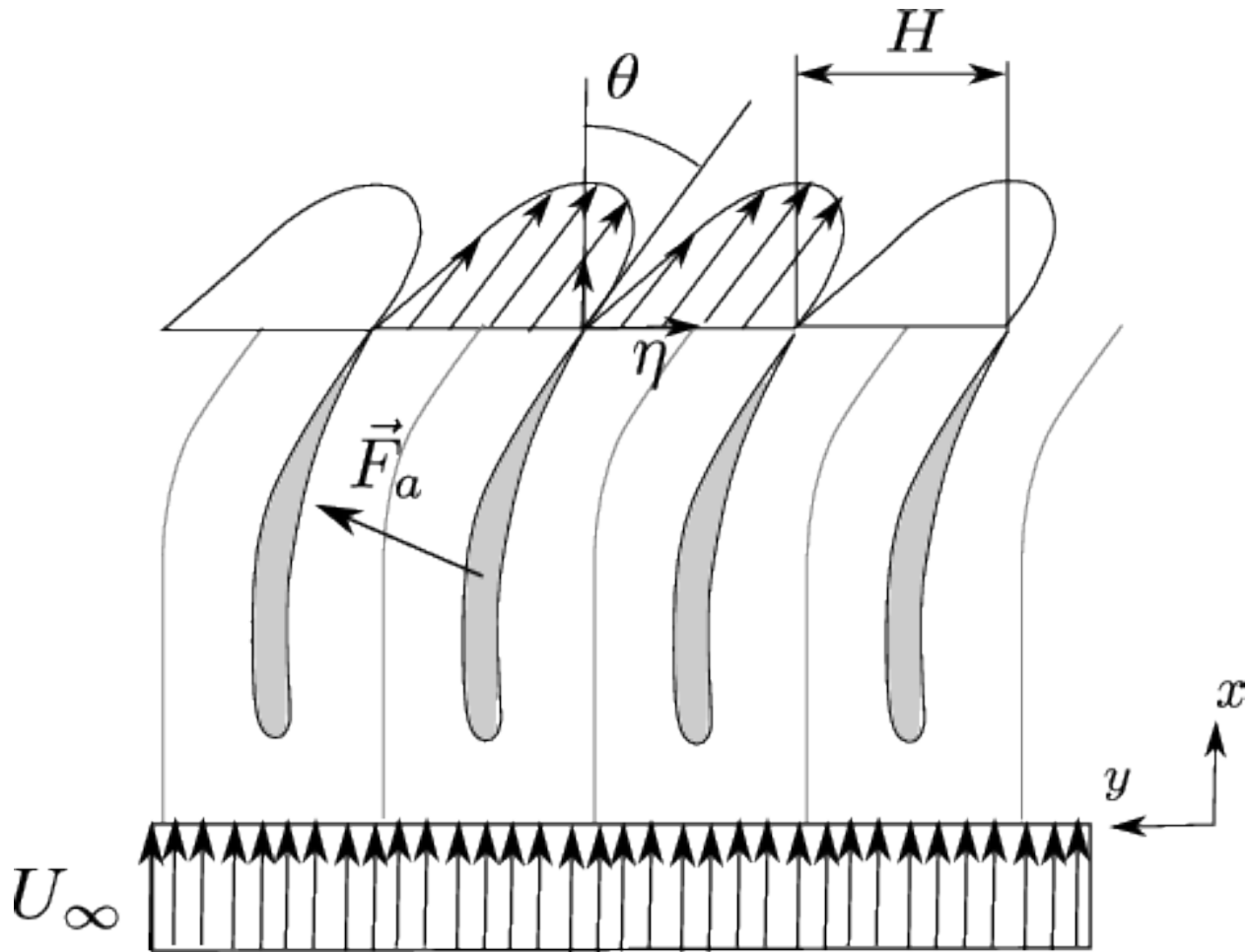
$$\begin{cases} F_x = \rho \frac{Q^2}{A_1} + (p_1 - p_a) A_1 & \Rightarrow F_x = 1.876 \cdot 10^6 \text{ N} \\ F_y = -\rho \frac{Q^2}{A_2} - (p_2 - p_a) A_2 & \Rightarrow F_y = -6.250 \cdot 10^6 \text{ N} \end{cases}$$

4.20.8 Exercise 4.8

Exercise 4.8 Un numero elevato di profili è disposto come in figura. Il profilo di ingresso è uniforme $\mathbf{u} = U_\infty \hat{\mathbf{x}}$, mentre il profilo di uscita ha andamento $\mathbf{u} = \beta U_\infty (\cos \theta \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta \hat{\mathbf{y}}) \sin \frac{\pi \eta}{H}$ in ogni canale (sia η la coordinata che descrive la sezione di uscita). Sulla sezione di ingresso la pressione media vale P_1 , sulla sezione di uscita P_2 .

Calcolare il fattore β del profilo di velocità in uscita e la risultante delle forze (per unità di apertura) agente sul singolo profilo.

(Risultati: $\beta = \frac{\pi}{2 \cos \theta}$, $\mathbf{F} = [(P_1 - P_2)H + \rho U^2 H ((1 - \pi^2/8)] \hat{\mathbf{x}} + \pi^2/8 \tan \theta \hat{\mathbf{y}})$)



Concetti. Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo. Simmetria.

- Ricavare il coefficiente β dal bilancio di massa
- Usare le ipotesi di simmetria nel bilancio di quantità di moto per annullare alcuni termini

Svolgimento. Si ricava il coefficiente β dal bilancio di massa in forma integrale. Si utilizza la simmetria del problema nel bilancio di quantità moto per ricavare le azioni sui profili.

...

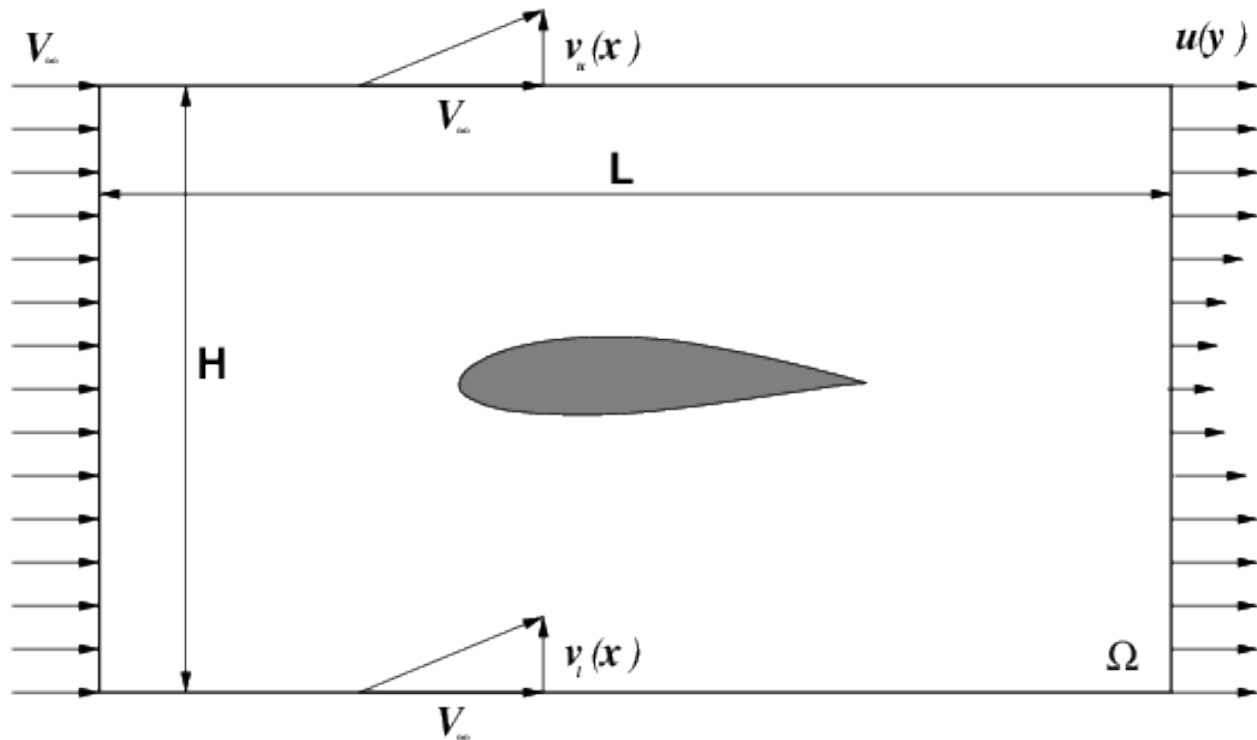
4.20.9 Exercise 4.9

Exercise 4.9 Calcolare la resistenza di un profilo immerso in una corrente stazionaria con velocità asintotica V_∞ , sapendo la distribuzione della componente di velocità $u(y)$ parallela a V_∞ a valle del profilo e assumendo che:

- la pressione statica sul contorno del volume di controllo sia costante e pari a quella della corrente indisturbata a monte del profilo;
- sul lato superiore e inferiore del volume di controllo sia possibile trascurare la componente lungo l'asse x della perturbazione della velocità dovuta alla presenza del profilo:

$$\mathbf{V} = (V_\infty + u, v) \simeq (V_\infty, v).$$

$$(R = \int_0^H \rho u(y)[V_\infty - u(y)]dy.)$$



Concetti. Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo. Esperienza in laboratorio sul *difetto di scia*.

Svolgimento. Vengono scritti i bilanci integrali di massa e quantità di moto, opportunamente semplificati (ipotesi di stazionarietà $\frac{d}{dt} \equiv 0$, densità costante $\rho = \bar{\rho}$, ipotesi sulle condizioni sul bordo esterno del dominio); all'interno dei bilanci si possono riconoscere i termini legati alle azioni scambiate dal fluido con il profilo (l'incognita del problema); si sfrutta infine la geometria rettangolare del contorno esterno e le ipotesi su di esso per ottenere una forma ulteriormente semplificata dei bilanci e trovare la soluzione del problema.

- Scrittura e semplificazione dei bilanci di massa e quantità di moto.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho + \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial\Omega} p \hat{\mathbf{n}} - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{s}_n = 0 & \text{(quantità di moto)} \end{cases}$$

Nel problema, il contorno del dominio fluido $\partial\Omega$ è costituito dal bordo rettangolare γ_∞ lontano dal profilo e dal bordo γ_p coincidente con il profilo stesso. La forza \mathbf{F} agente sul profilo è l'integrale degli sforzi generati dal fluido (uguali e contrari agli sforzi agenti sul fluido) sul contorno del profilo. Inoltre si può fare l'ipotesi di sforzi viscosi nulli e pressione costante sul bordo esterno: l'integrale sul dominio esterno si riduce all'integrale della normale su una superficie chiusa ed è quindi nullo. Si può dunque scrivere:

$$\oint_{\partial\Omega} (-p \hat{\mathbf{n}} + \mathbf{s}_n) = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{t}_n = \underbrace{\oint_{\gamma_p} \mathbf{t}_n}_{=-\mathbf{F}} + \underbrace{\oint_{\gamma_\infty} \mathbf{t}_n}_{=0} = -\mathbf{F}$$

Osservazione. A differenza di quanto fatto in classe, non è stata fatta l'ipotesi di fluido non viscoso; il contributo all'infinito si annulla con l'ipotesi di pressione costante all'infinito e sforzi viscosi trascurabili. Per ritrovarsi con gli appunti, sostituire \mathbf{t}_n con $-p \hat{\mathbf{n}}$.

Dopo aver fatto l'ipotesi di stazionarietà e aver inserito la definizione di \mathbf{F} appena data, le equazioni di bilancio possono essere scritte come:

$$\begin{cases} \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \mathbf{F} = - \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{cases}$$

Il bilancio di quantità di moto può essere scritto esplicitando e separando le componenti vettoriali.

$$\begin{aligned} F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} &= - \oint_{\partial\Omega} \rho (u\mathbf{x} + v\mathbf{y}) \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ &= - \hat{\mathbf{x}} \oint_{\partial\Omega} \rho u \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{y}} \oint_{\partial\Omega} \rho v \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

- Scrittura delle equazioni di bilancio in componenti (sfruttando la geometria rettangolare del bordo esterno: γ_1 indica il bordo di sinistra, γ_2 il bordo inferiore, γ_3 quello di destra, γ_4 quello superiore).

Attenzione: la normale è quella uscente dal dominio fluido. Sul contorno del profilo, la normale è entrante nel profilo. In più: non fare confusione tra azioni del profilo agenti sul fluido e azioni del fluido agenti sul profilo!

$$\begin{cases} 0 = \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = - \int_{\gamma_1} \rho u - \int_{\gamma_2} \rho v + \int_{\gamma_3} \rho u + \int_{\gamma_4} \rho v \\ F_x = + \int_{\gamma_1} \rho u^2 + \int_{\gamma_2} \rho uv - \int_{\gamma_3} \rho u^2 - \int_{\gamma_4} \rho uv \\ F_y = + \int_{\gamma_1} \rho uv + \int_{\gamma_2} \rho v^2 - \int_{\gamma_3} \rho uv - \int_{\gamma_4} \rho v^2 \end{cases}$$

- Ipotesi sulla velocità sui lati orizzontali ($u|_{\gamma_2} = u|_{\gamma_4} = V_\infty$ costante), per poter ulteriormente semplificare il risultato.

$$\begin{cases} \int_{\gamma_2} \rho v - \int_{\gamma_4} \rho v = - \int_{\gamma_1} \rho u + \int_{\gamma_3} \rho u \\ F_x = + \int_{\gamma_1} \rho u^2 - \int_{\gamma_3} \rho u^2 + V_\infty \left[\int_{\gamma_2} \rho v - \int_{\gamma_4} \rho v \right] \end{cases}$$

E inserendo la prima nella seconda:

$$\begin{aligned} F_x &= \int_{\gamma_1} \rho u^2 - \int_{\gamma_3} \rho u^2 + V_\infty \left[- \int_{\gamma_1} \rho u + \int_{\gamma_3} \rho u \right] = \\ &= \int_{\gamma_1} \rho u (u - V_\infty) + \int_{\gamma_3} \rho u (V_\infty - u) = \quad (u|_{\gamma_1} = V_\infty \Rightarrow \text{il primo integrale è nullo}) \\ &= \int_{\gamma_3} \rho u (V_\infty - u) = \\ &= \int_0^H \rho u(y) (V_\infty - u(y)) dy \end{aligned}$$

Osservazioni. Tramite la misura del campo di velocità in galleria è possibile stimare la resistenza del corpo. Le condizioni di «aria libera» e in galleria sono diverse. In generale, in galleria il fluido è confinato dalle pareti di galleria, maggiormente «vincolato». Inoltre sulle pareti della galleria esiste una condizione di adesione, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$: per la conservazione della massa, il rallentamento del fluido in corrispondenza delle pareti della galleria viene compensato da un incremento della velocità nella regione «più lontana» dalla parete, rispetto a un corpo in aria libera. Per tenere conto di effetti di **bloccaggio** dovuti al confinamento in galleria, è necessario compiere delle correzioni delle misure sperimentali. Agli effetti di bloccaggio, vanno aggiunti gli effetti di **galleggiamento** dovuti al gradiente di pressione lungo la galleria, che danno un effetto di resistenza aggiuntiva. Inoltre è importante che la dimensione del corpo rispetto alla dimensione della galleria non sia né «troppo grosso» (per problemi di “bloccaggio”), né, di solito, «troppo piccolo» (per motivi di similitudine; ma sarà argomento di puntate successive del corso...). È importante avere in mente la necessità di prestare attenzione a questi aspetti, quando vengono svolte attività sperimentali. Ma questo sarà argomento di altri capitoli o di altri corsi...

4.20.10 Exercise 4.9 - Experiment: wake defect

L'esercizio svolto in precedenza risulta propedeutico per l'analisi dei dati ottenuti tramite alcune attività sperimentali, per ottenere delle risultanti di forze e momenti da misure del campo di velocità (e pressione, a volte) tramite i bilanci integrali. Le attività svolte nel mondo reale sono affette da imprecisioni e incertezze. La quantificazione (o almeno la stima) dell'incertezza del risultato di un'attività sperimentale è parte integrante del risultato stesso. I valori x_i , $i = 1 : N$ di grandezze misurate possono essere combinati per calcolare delle grandezze derivate $f(x_i)$. I *datasheet* che accompagnano uno strumento raccolgono anche le informazioni sulla sua incertezza di misura, spesso in forma di intervallo di confidenza o di scarto quadratico medio. L'incertezza sulle misure sperimentali x_i si propaga sul valore della funzione $f(x_i)$. Nell'ipotesi che le incertezze di misura sulle variabili d_i siano tra di loro indipendenti e non correlate, è possibile utilizzare la **formula RSS (root-sum-squares)** per la propagazione dell'incertezza. Se la misura x_i ha incertezza σ_{x_i} , una stima dell'incertezza su f vale

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 .$$

L'incertezza σ_f^2 sulla quantità f , obiettivo dell'attività sperimentale, è un indicatore della bontà del metodo sperimentale utilizzato ed del sistema di misura disponibile per tale attività. In generale, l'incertezza sulla grandezza desiderata deve essere «molto minore» della grandezza stessa: in caso contrario, l'apparato sperimentale risulterebbe inadeguato all'esperimento. Essendo parte integrante del risultato, è buona regola indicare l'incertezza sui risultati delle attività sperimentali, ad esempio fornendone il valore numerico, il valore relativo alla misura o gli intervalli di confidenza sui grafici.

Risultante delle forze: bilancio di quantità di moto di un volume di controllo .

Esistono metodi sperimentali, come ad esempio la **PIV** (Particle Image Velocimetry o, in italiano, velocimetria a immagini di particelle), che permettono di ottenere il campo di velocità in un determinato istante all'interno di un dominio di misura, un piano bidimensionale o un volume tridimensionale. Il bilancio di quantità di moto del volume di controllo contenente un corpo solido permette poi di calcolare la risultante delle forze scambiate tra corpo e fluido.

Per semplicità, viene considerato un campo di moto bidimensionale, $\mathbf{u}(x, y) = u(x, y)\hat{\mathbf{x}} + v(x, y)\hat{\mathbf{y}}$. Ad esempio, il campo di moto attorno alla mezzera di un'ala allungata senza freccia investita da una corrente con un angolo di incidenza ridotto è in buona approssimazione bidimensionale. In questo caso, misure PIV (PIV-2D-2C) forniscono le due componenti (2C) del campo di velocità nel piano (2D) di misura. Tramite il bilancio della quantità di moto del dominio bidimensionale, è possibile ottenere una stima della risultante delle forze (per unità di apertura) che esercita il fluido sul profilo di ala tagliato dal piano di misura. Considerando gli effetti viscosi trascurabili, al di fuori di regioni di dimensione ridotta nell'ambito di applicazioni aeronautiche (alto numero di Reynolds, strato limite e scie sottili), il bilancio integrale della quantità di moto del fluido nel volume di misura fornisce, in un caso stazionario, la risultante delle forze \mathbf{R} agenti sul corpo,

$$\mathbf{R} = - \oint_S \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \oint_S p \hat{\mathbf{n}} ,$$

avendo trascurato il contributo delle forze di volume. Nell'ipotesi, più che sensata per molte applicazioni aeronautiche, che sia valido il teorema di Bernoulli sulla frontiera S del volume di controllo, la pressione viene espressa in funzione della velocità locale e dello stato della corrente asintotica,

$$p = p_\infty + \rho \frac{|\mathbf{U}_\infty|^2}{2} - \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} .$$

Inserendo questa espressione della pressione nell'espressione della risultante delle forze ed eliminando gli integrali (nulli) su una superficie chiusa delle quantità costanti moltiplicate per la normale alla superficie, come ad esempio $\oint_S p_\infty \hat{\mathbf{n}}$, si può esprimere la risultante \mathbf{R} della forza aerodinamica agente sul corpo in funzione della sola velocità del fluido sulla frontiera S ,

$$\mathbf{R} = - \oint_S \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_S \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \hat{\mathbf{n}} .$$

Sotto queste ipotesi, la forza aerodinamica agente sul corpo, in questo esempio l'obiettivo della misura, è stata scritta unicamente come funzione del campo di velocità sulla superficie S , fornito come «risultato diretto» dell'attività sperimentale. Per semplicità, la densità del fluido viene considerata costante e nota senza incertezza: nel caso che anche il campo di densità fosse affetto da incertezza, la formula RSS permette di aggiungere abbastanza facilmente il suo effetto a quello dovuto all'incertezza sulla misura del campo di velocità.

Risultante delle forze: discretizzazione.

Per la sua natura, la PIV fornisce dei risultati discreti (non continui): di solito, il campo di velocità viene misurato sui nodi di una griglia cartesiana. Per il calcolo della risultante \mathbf{R} sono necessari solamente gli N_n nodi esterni \mathbf{x}_i , $i = 1 : N_n$, posti sul contorno della griglia. Il campo di velocità viene approssimato (linearmente, per semplicità) utilizzando un approccio simile a quello impiegato nella modellazione numerica a elementi finiti. Viene introdotto un insieme completo di funzioni di base $\phi_i(\mathbf{x})$, $i = 1 : N_n$, lineari a tratti sul contorno S , grazie alle quali è possibile scrivere l'approssimazione \mathbf{u}^h del campo di velocità

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{U}_i .$$

Utilizzando funzioni di base lagrangiane, per le quali il valore della funzione i -esima $\phi_i(\mathbf{x})$ è uguale a uno sul nodo i -esimo \mathbf{x}_i e zero sugli altri nodi,

$$\phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} \quad , \quad \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\mathbf{x}) = 1 , \forall i = 1 : N_n ,$$

i coefficienti \mathbf{U}_i della ([exp:u:fem-exp]{reference-type=>ref} reference=>exp:u:fem-exp}) concidono con i valori nodali, $\mathbf{U}_i := \mathbf{u}(\mathbf{x}_i)$ ricavati nei punti \mathbf{x}_i tramite la misura sperimentale. Introducendo il campo di velocità approssimato $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ nell'espressione della risultante delle forze, si ottiene una formula nella quale compaiono gli integrali di superficie del prodotto delle funzioni di base e del versore normale,

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \approx \mathbf{R}^h &= - \oint_S \rho \mathbf{u}^h \mathbf{u}^h \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_S \rho \frac{\mathbf{u}^h \cdot \mathbf{u}^h}{2} \hat{\mathbf{n}} = \\ &= -\rho \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{U}_i \mathbf{U}_j \cdot \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \rho \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{U}_j \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \\ &= -\rho \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{U}_i \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{I}_{ij} + \frac{1}{2} \rho \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{U}_j \mathbf{I}_{ij} , \end{aligned}$$

dove sono stati introdotti i vettori $\mathbf{I}_{ij} = \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$, facilmente calcolabili in maniera analitica, come spiegato nella sezione §0.0.0.9{reference-type=>ref} reference=>sec:fem}.

Sensitività della risultante al campo di velocità.

Per ricavare tramite la formula RSS l'incertezza sulla misura della risultante delle forze \mathbf{R} dall'incertezza sulle misure del campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, è necessario calcolare la *variazione* di \mathbf{R} rispetto al campo $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Perturbando il campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ con la variazione $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$, e trascurando i termini di ordine superiore al primo, dopo aver sottratto l'equazione «non

perturbata», si ottiene la perturbazione della risultante delle forze $\delta\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} + \delta\mathbf{R} &= - \oint_S \rho(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u})(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_S \frac{1}{2} \rho(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) \hat{\mathbf{n}} \\
 \rightarrow \delta\mathbf{R} &= - \oint_S \rho [\mathbf{u} \hat{\mathbf{n}} \cdot \delta\mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \delta\mathbf{u}] + \oint_S \rho \hat{\mathbf{n}} \mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{u} \\
 &= \oint_S \rho [-\mathbf{u} \otimes \hat{\mathbf{n}} - (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbb{1} + \hat{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{u}] \cdot \delta\mathbf{u} = \\
 &= \oint_S \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{u} = \\
 &= \oint_S \begin{bmatrix} \nabla_u R_x & \nabla_v R_x \\ \nabla_u R_y & \nabla_v R_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{bmatrix} = \oint_S \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{u}} R_x \cdot \delta\mathbf{u} \\ \nabla_{\mathbf{u}} R_y \cdot \delta\mathbf{u} \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

avendo introdotto il campo tensoriale della sensitività $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R}(\mathbf{x})$ della risultante delle forze rispetto al campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ed evidenziato l'influenza delle due componenti del campo di velocità sulle due componenti di forza. L'equazione precedente può essere scritta con notazione indiciale

$$\delta R_i = \oint_S \nabla_{u_j} R_i \delta u_j = -\rho \oint_S [u_i n_j + u_k n_k \delta_{ij} - n_i u_j] \delta u_j,$$

o esplicitamente in coordinate cartesiane, per ricavare l'espressione della sensitività della componenti della forza dalle singole componenti del campo di velocità,

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \delta R_x \\ \delta R_y \end{cases} &= \rho \oint_S [-u n_x - u n_x - v n_y + u n_x] \delta u + \rho \oint_S [-u n_y + v n_x] \delta v \\
 &= \rho \oint_S [-v n_x + u n_y] \delta u + \rho \oint_S [-v n_y - u n_x - v n_y + v n_y] \delta v \\
 \rightarrow \begin{cases} \delta R_x \\ \delta R_y \end{cases} &= \rho \oint_S [-u n_x - v n_y] \delta u + \rho \oint_S [-u n_y + v n_x] \delta v = \oint_S \nabla_u R_x \delta u + \oint_S \nabla_v R_x \delta v \\
 &= \rho \oint_S [-v n_x + u n_y] \delta u + \rho \oint_S [-v n_y - u n_x] \delta v = \oint_S \nabla_u R_y \delta u + \oint_S \nabla_v R_y \delta v.
 \end{aligned}$$

Sensitività della risultante alle misure di velocità.

Partendo dall'espansione ([exp:u:fem-exp]{reference-type=>ref} reference=>exp:u:fem-exp}) del campo di velocità, la variazione del campo $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ diventa

$$\delta\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\mathbf{x}) \delta\mathbf{U}_i,$$

avendo indicato con $\delta\mathbf{U}_i$ la variazione dei valori nodali del campo di velocità. Le funzioni di base sono note, e quindi la loro variazione è nulla.¹ Introducendo l'espressione ([exp:du:fem-exp]{reference-type=>ref} reference=>exp:du:fem-exp}) di $\delta\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ all'interno della formula ([eqn:sens:cont]{reference-type=>ref} reference=>eqn:sens:cont}) che lega la variazione $\delta\mathbf{R}$ alla variazione $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$,

$$\delta\mathbf{R} = \oint_S \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N_n} \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{U}_i = \sum_{i=1}^{N_n} \nabla_{\mathbf{U}_i} \mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{U}_i,$$

si ricava l'espressione della sensitività $\nabla_{\mathbf{U}_i} \mathbf{R}$ della risultante delle forze rispetto alla misura di velocità \mathbf{U}_i , in funzione della sensitività $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R}(\mathbf{x})$ della risultante rispetto al campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ e alle funzioni di base $\phi_i(\mathbf{x})$,

$$\nabla_{\mathbf{U}_i} \mathbf{R} = \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R}.$$

¹ L'operazione di variazione ha proprietà simili a quelle di derivazione. Ad esempio la variazione del prodotto di due funzioni vale $\delta(ab) = \delta a b + a \delta b$.

La sensitività $\nabla_{\mathbf{U}_i} R_k$ della componente R_k della risultante delle forze rispetto alla misura \mathbf{U}_i è quindi

$$\nabla_{\mathbf{U}_i} R_k = \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{u}} R_k .$$

Sensitività della risultante alle misure di velocità: discretizzazione.

Inserendo l'approssimazione \mathbf{u}^h nella formula della sensitività $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R}$, è possibile calcolare la sensitività della risultante alle misure di velocità \mathbf{U}_i ,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{U}_i} \mathbf{R} &= \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R} = \\ &= \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \rho [-\mathbf{u} \otimes \hat{\mathbf{n}} - (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbb{I} + \hat{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{u}] = \\ &= \rho \sum_{j=1}^{N_n} \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) [-\mathbf{U}_j \otimes \hat{\mathbf{n}} - (\mathbf{U}_j \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbb{I} + \hat{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{U}_j] = \\ &= \rho \sum_{j=1}^{N_n} [-\mathbf{U}_j \otimes \mathbf{I}_{ij} - (\mathbf{U}_j \cdot \mathbf{I}_{ij}) \mathbb{I} + \mathbf{I}_{ij} \otimes \mathbf{U}_j] , \end{aligned}$$

avendo riconosciuto i vettori \mathbf{I}_{ij} definiti in precedenza. La sensitività della componente R_k alla misura \mathbf{U}_i vale $\nabla_{\mathbf{U}_i} R_k =$

$$\rho \sum_{j=1}^{N_n} [-U_{j,k} \mathbf{I}_{ij} - (\mathbf{U}_j \cdot \mathbf{I}_{ij}) \hat{\mathbf{e}}_k + I_{ij,k} \mathbf{U}_j] ,$$

dove $\hat{\mathbf{e}}_k$ è il versore in direzione k e $U_{j,k}$, $I_{ij,k}$ le componenti in quella direzione della misura \mathbf{U}_i e del vettore \mathbf{I}_{ij} .

Osservazione 1.

Si può dimostrare che le sensitività $\nabla_{\mathbf{U}_i} \mathbf{R}$ sono le componenti del gradiente della formula ([eqn:RU]{reference-type=>ref}> reference=>eqn:RU}) che esprime \mathbf{R} come una funzione quadratica delle variabili \mathbf{U}_i .

Osservazione 2.

Utilizzando la formula generale ([eqn:sens:RU]{reference-type=>ref}> reference=>eqn:sens:RU}) o utilizzando la forma discretizzata delle espressioni ([eqn:sens:cart:simple]{reference-type=>ref}> reference=>eqn:sens:cart:simple}), si può dimostrare che

$$\begin{aligned} \nabla_{U_{i,x}} R_x &= \nabla_{U_{i,y}} R_y = -\rho \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{I}_{ij} \\ -\nabla_{U_{i,y}} R_x &= \nabla_{U_{i,x}} R_y = -\rho \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{U}_j \times \mathbf{I}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Incetezza sulla risultante dall'incetezza sulla misura di velocità.

Utilizzando la formula del campo \mathbf{u}^h , viene calcolata la varianza $\sigma_{R_k}^2$ della componente R_k ,

$$\begin{aligned}\sigma_{R_k}^2 &= E[\delta R_k \delta R_k] = \rho^2 E \left[\oint_{S(\mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) \oint_{S(\mathbf{y})} \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{y}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{y}) \right] = \\ &= \oint_{S(\mathbf{x})} \oint_{S(\mathbf{y})} \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{x}) \cdot E[\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \delta \mathbf{u}(\mathbf{y})] \cdot \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{y}) \approx \\ &= \oint_{S(\mathbf{x})} \oint_{S(\mathbf{y})} \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{x}) \cdot \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{N_n} \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{y}) E[\delta \mathbf{U}_i \otimes \delta \mathbf{U}_j] \cdot \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{y}),\end{aligned}$$

dove sono state indicate esplicitamente le variabili indipendenti \mathbf{x} , \mathbf{y} sulle quali devono essere svolte le integrazioni. Si fa l'ipotesi che l'incetezza della misura della componente in un punto sia indipendente dalla misura delle altre componenti della velocità nello stesso punto e dalla velocità negli altri punti del dominio. Si ipotizza inoltre che l'incetezza sulla singola misura in tutto il dominio sia uguale a σ_U^2 su tutte le componenti della velocità. L'espressione dei valori attesi $E[\delta \mathbf{U}_i \otimes \delta \mathbf{U}_j]$ diventa quindi

$$E[\delta \mathbf{U}_i \otimes \delta \mathbf{U}_j] = \sigma_U^2 \delta_{ij} \mathbb{1}$$

e di conseguenza l'incetezza della componente di forza R_k ,

$$\begin{aligned}\sigma_{R_k}^2 &= \oint_{S(\mathbf{x})} \oint_{S(\mathbf{y})} \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{x}) \cdot \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{y}) \sigma_U^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{N_n} \left\{ \oint_{S(\mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) \right\} \cdot \left\{ \oint_{S(\mathbf{y})} \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{y}) \phi_i(\mathbf{y}) \right\} \sigma_U^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{N_n} \nabla_{\mathbf{U}_i} R_k \cdot \nabla_{\mathbf{U}_i} R_k \sigma_U^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{N_n} |\nabla_{\mathbf{U}_i} R_k|^2 \sigma_U^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{N_n} ((\nabla_{U_{i,x}} R_k)^2 + (\nabla_{U_{i,y}} R_k)^2) \sigma_U^2,\end{aligned}$$

avendo riconosciuto la sensitività $\nabla_{\mathbf{U}_i} R_k$ della componente di forza R_k rispetto alla misura della velocità $\mathbf{U}_i = \mathbf{u}(\mathbf{x}_i)$.

Cenni sugli elementi finiti. {#sec:fem}

In questo paragrafo si fornisce qualche dettaglio sulla discretizzazione «a elementi finiti» usata nel calcolo della risultante aerodinamica e della sua incetezza. Un dominio S , come ad esempio la superficie di controno del volume di controllo considerato, viene suddiviso negli elementi S_k , l'unione dei quali costituisce il dominio S

$$S = \bigcup_{k=1}^{N_e} S_k$$

e che non hanno punti in comune tra di loro se non i bordi. Vengono poi definite delle funzioni di base $\phi_i(\mathbf{x})$, grazie alle quali è possibile approssimare (sulle quali viene proiettata) una funzione generica

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\mathbf{x}) f_i.$$

La dipendenza dalla variabile spaziale \mathbf{x} è contenuta nelle funzioni di base $\phi(\mathbf{x})$, le quali vengono moltiplicate per i coefficienti f_i . In generale, le funzioni $\phi_i(\mathbf{x})$ sono regolari a tratti, essendo regolari all'interno dei singoli elementi S_k e continue sui loro bordi. Nel metodo degli *elementi finiti*, le funzioni di base sono *a supporto compatto*, cioè sono diverse da zero solo su un dominio chiuso e limitato: il carattere «locale» delle singole funzioni di base viene sfruttato nel metodo degli elementi finiti per operare con matrici sparse, all'interno delle quali solo pochissimi elementi sono diversi da zero in ogni riga o colonna. Il supporto della funzione $\phi_i(\mathbf{x})$ è la parte di dominio al di fuori della quale la funzione è nulla. Nel metodo degli elementi finiti, il supporto di $\phi_i(\mathbf{x})$ è costituito dagli elementi S_k ai quali appartiene il nodo \mathbf{x}_i . Indichiamo il supporto di $\phi_i(\mathbf{x})$ con B_i . Le funzioni di base vengono definite lagrangiane, se la funzione i -esima $\phi_i(\mathbf{x})$ è uguale a uno sul nodo i -esimo \mathbf{x}_i e zero sugli altri nodi,

$$\phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} \quad , \quad \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\mathbf{x}) = 1, \forall i = 1 : N_n .$$

In questo caso, i coefficienti f_i coincidono con i valori nodali della funzione $f(\mathbf{x})$, $f_i := f(\mathbf{x}_i)$. Viene definita una *connettività* della griglia degli elementi finiti, che consiste in un elenco ordinato dell'indice dei nodi di ogni elemento: in questa maniera viene definita una numerazione locale dei nodi di ogni singolo elemento, che risulta utile nel calcolo degli integrali. Viene indicato con $I_k = \{i_{k1}, i_{k2}, \dots, i_{kn}\}$, l'elenco degli n nodi dell'elemento S_k .

In figura 2{reference-type=>ref} reference=>fig:base-fcn} è rappresentata una parte di una suddivisione in elementi finiti S_k di un dominio monodimensionale, sul quale sono definite delle funzioni di base lagrangiane, lineari a tratti, a supporto compatto: ad esempio, la funzione di base $\phi_{i2}(\mathbf{x})$ è diversa da zero solo sugli elementi S_{e1} e S_{e2} . Ogni elemento ha due nodi. Se viene definita la connettività nodi-elemento,

$$\begin{aligned} I_{e1} &= \{i_1, i_2\} , \\ I_{e2} &= \{i_2, i_3\} , \\ I_{e3} &= \{i_4, i_3\} , \end{aligned}$$

il nodo i_1 è il primo nodo (quello che ha l'indice = 1 nella numerazione locale) dell'elemento S_{e1} , il nodo i_2 è il secondo nodo di S_{e1} e il primo di S_{e2} , il nodo i_3 è il secondo nodo sia di S_{e2} sia di S_{e3} , il nodo i_4 è il primo nodo di S_{e3} .

{#fig:base-fcn width=>55%>} {#fig:base-fcn width=>30%>}

Si utilizzano ora le proprietà della base di funzioni lineari a tratti $\phi_i(\mathbf{x})$ per calcolare i vettori \mathbf{I}_{ij} che compaiono nel calcolo della risultante delle forze e nella sua varianza,

$$\mathbf{I}_{ij} := \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) .$$

Gli unici termini \mathbf{I}_{ij} che non sono nulli sono quelli in cui compaiono due funzioni, che hanno supporti a intersezione non nulla, $B_i \cap B_j \neq \emptyset$. In questi termini, il dominio di integrazione può essere limitato alla sola intersezione dei supporti delle due funzioni, essendo il prodotto di queste nullo al di fuori di esso. Ad esempio, facendo riferimento alla figura 2{reference-type=>ref} reference=>fig:base-fcn}, il termine $\mathbf{I}_{i2,i1}$ può essere riscritto come

$$\mathbf{I}_{i2,i1} = \oint_S \phi_{i2}(\mathbf{x}) \phi_{i1}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} = \int_{B_{i2} \cap B_{i1}} \phi_{i2}(\mathbf{x}) \phi_{i1}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} = \int_{S_{e1}} \phi_{i2}(\mathbf{x}) \phi_{i1}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} ,$$

il termine $\mathbf{I}_{i2,i2}$ può essere riscritto come

$$\mathbf{I}_{i2,i2} = \oint_S \phi_{i2}(\mathbf{x}) \phi_{i2}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} = \int_{B_{i2}} \phi_{i2}(\mathbf{x}) \phi_{i2}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} = \int_{S_{e1} \cup S_{e2}} \phi_{i2}(\mathbf{x}) \phi_{i2}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} ,$$

mentre il termine $\mathbf{I}_{i2,i4}$ è nullo. Gli integrali sugli elementi S_i nello spazio «fisico» possono essere calcolati sull'elemento di riferimento \hat{S} , definito in $\xi \in [-1, 1]$. La trasformazione di coordinate che porta l'elemento di riferimento \hat{S} nell'elemento fisico S_k delimitato dai punti di coordinata x_{k1} e x_{k2} è

$$x = \frac{x_{k2} + x_{k1}}{2} + \frac{x_{k2} - x_{k1}}{2} \xi$$

e il suo «determinante» è

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{x_{k2} - x_{k1}}{2} = \frac{\ell_k}{2}.$$

Se si considera costante il versore normale $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}}$ sull'elemento finito S_{e1} e si utilizza la connettività nodi-griglia dell'esempio definita in ([eqn:conn:ex]{reference-type=>ref} reference=>eqn:conn:ex}), l'integrale $\mathbf{I}_{i2,i1}$ può essere trasformato nell'integrale sull'elemento di riferimento

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{i2,i1} &= \int_{S_{e1}} \phi_{i2}(x)\phi_{i1}(x)\hat{\mathbf{n}}dx = \int_{\hat{S}} \varphi_2(\xi)\varphi_1(\xi)\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi\hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}} = \\ &= \int_{\xi=-1}^1 \varphi_2(\xi)\varphi_1(\xi)\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi\hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}}, \end{aligned}$$

avendo riconosciuto il legame tra l'elemento S_{e1} nel dominio fisico e quello di riferimento \hat{S} , $\phi_i(x) = \phi_i(x(\xi)) = \varphi_{i^\ell}(\xi)$, dove è stato indicato con i^ℓ l'indice locale del nodo globale con indice i : dalla connettività dell'elemento S_{e1} risulta $i_1^\ell = 1$ $i_2^\ell = 2$. Il «determinante» della trasformazione è noto e costante, $\partial x/\partial \xi|_{S_{e1}} = \ell_{S_{e1}}/2$. L'espressione delle funzioni sull'elemento locale è facilmente ricavabile. Le funzioni di base lagrangiane devono essere uguali a 1 in un nodo e zero in tutti gli altri. Considerando i punti $\xi = -1$ e $x = 1$ come primo e secondo nodo dell'elemento di riferimento \hat{S} , le funzioni definite sull'elemento di riferimento valgono

$$\varphi_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad , \quad \varphi_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi).$$

È immediato calcolare il valore degli integrali sull'elemento di riferimento,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi_1(\xi)\varphi_1(\xi)d\xi &= \frac{2}{3} \quad , \quad \int_{-1}^1 \varphi_1(\xi)\varphi_2(\xi)d\xi = \frac{1}{3} \\ \int_{-1}^1 \varphi_2(\xi)\varphi_1(\xi)d\xi &= \frac{1}{3} \quad , \quad \int_{-1}^1 \varphi_2(\xi)\varphi_2(\xi)d\xi = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Questi valori vengono infine utilizzati nel calcolo dei vettori \mathbf{I}_{ij} . I vettori dell'esempio valgono

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{i2,i1} &= \int_{S_{e1}} \phi_{i2}(x)\phi_{i1}(x)\hat{\mathbf{n}}dx = \\ &= \int_{\xi=-1}^1 \varphi_2(\xi)\varphi_1(\xi)\frac{\partial x}{\partial \xi}\Big|_{S_{e1}} d\xi\hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}} = \frac{1}{3}\frac{\ell_{e1}}{2}\hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}} = \frac{\ell_{e1}}{6}\hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}}, \\ \mathbf{I}_{i2,i2} &= \int_{S_{e1} \cup S_{e2}} \phi_{i2}(x)\phi_{i2}(x)\hat{\mathbf{n}}dx = \\ &= \int_{S_{e1}} \phi_{i2}(x)\phi_{i2}(x)\hat{\mathbf{n}}dx + \int_{S_{e2}} \phi_{i2}(x)\phi_{i2}(x)\hat{\mathbf{n}}dx = \\ &= \int_{\xi=-1}^1 \varphi_2(\xi)\varphi_2(\xi)\frac{\partial x}{\partial \xi}\Big|_{S_{e1}} d\xi\hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}} + \int_{\xi=-1}^1 \varphi_1(\xi)\varphi_1(\xi)\frac{\partial x}{\partial \xi}\Big|_{S_{e2}} d\xi\hat{\mathbf{n}}_{S_{e2}} = \\ &= \frac{\ell_{e1}}{3}\hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}} + \frac{\ell_{e2}}{3}\hat{\mathbf{n}}_{S_{e2}}. \end{aligned}$$

4.20.11 Exercise 4.10

Exercise 4.10 Viene dato l'irrigatore rappresentato in figura, del quale sono note le sue dimensioni geometriche, R_0, R_1, ℓ, h . L'irrigatore è libero di ruotare attorno all'asse z . Si conosce la densità del fluido ρ e la velocità "di ingresso" U_0 uniforme sulla sezione S_0 . Supponendo

- la pressione uniforme sulle sezioni S_0, S_1, S_2 e uguale alla pressione atmosferica dell'aria attorno all'irrigatore
- la velocità relativa rispetto al moto dell'irrigatore uniforme sulle sezioni S_1, S_2 ,
- gli effetti gravitazionali trascurabili

viene chiesto di calcolare la velocità V e la velocità di rotazione dell'irrigatore Ω , a regime.

Si scrivono i bilanci integrali di massa e momento della quantità di moto per il volume fluido V_t contenuto all'interno dell'irrigatore, delimitato dalla parete interna dell'irrigatore $S_{f,s}$, dalla sezione di ingresso S_0 e dalle due uscite S_1, S_2 . Si introducono due sistemi di riferimento cartesiani, uno inerziale, $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$, l'altro solidale con l'irrigatore, $\{\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Z}}\}$, con l'asse Z coincidente con l'asse z . Il bilancio di massa per un volume V_t ,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho + \oint_{\partial V_t} \rho (\mathbf{u} - \mathbf{b}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0,$$

viene semplificato

- utilizzando l'ipotesi di stazionarietà¹ del problema
- riconoscendo che la superficie $S_{s,f}$ non dà contributo al bilancio, poiché la velocità del fluido sul contorno solido deve essere uguale alla velocità del corpo, per la condizione al contorno di **adesione**: $\mathbf{u} = \mathbf{b}$ in ogni punto di $S_{s,f}$. Anche se fosse stato utilizzato un modello non viscoso per rappresentare il problema, sarebbe valida la condizione al contorno di **non penetrazione**: $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ su tutti i punti di $S_{s,f}$;
- la velocità della superficie S_0 è nulla, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ su S_0 e quindi la velocità relativa coincide con la velocità assoluta $\mathbf{U}_0 = U_0 \hat{\mathbf{z}}$, dato del problema;
- per i dati del problema, la velocità relativa del fluido sulle sezioni S_1, S_2 è uniforme: $\mathbf{u} - \mathbf{b} = V \hat{\mathbf{X}}$ su S_1 , $\mathbf{u} - \mathbf{b} = -V \hat{\mathbf{X}}$ su S_2

Dal bilancio di massa si trova quindi il modulo della velocità relativa della corrente sulle sezioni S_1, S_2 ,

$$0 = -\rho U_0 \pi R_0^2 + 2\rho V \pi R_1^2 \quad \rightarrow \quad V = \frac{1}{2} \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^2 U_0.$$

Il bilancio del momento della quantità di moto per il volume fluido V_t ,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} + \int_{\partial V_t} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{b}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V_t} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{g} + \int_{\partial V_t} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n.$$

Senza riportare i dettagli (TODO: riportare i dettagli) usando l'ipotesi che gli effetti gravitazionali trascurabili e che la pressione sia uniforme sulle superfici S_0, S_1, S_2 e uguale alla pressione atmosferica attorno all'irrigatore, il bilancio del momento di quantità di moto diventa

$$\mathbf{M}^s = -\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} - \oint_{\partial V_t} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{b}) \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

avendo messo in evidenza la risultante dei momenti \mathbf{M}^s agenti sul solido, rispetto all'origine dei sistemi di riferimento. Il contributo della superficie laterale $S_{s,f}$ è nullo, poiché è nullo il termine $(\mathbf{u} - \mathbf{b}) \cdot \hat{\mathbf{n}}$; il contributo della superficie S_0 è

¹ Dovrebbe essere chiaro che il concetto di «stazionarietà» dipende dal tipo di descrizione adottata per rappresentare il problema, euleriana, lagrangiana o arbitraria. Come esempio, in questo esercizio utilizziamo una descrizione arbitraria, utilizzando un volume di controllo che ruota insieme all'irrigatore. Per un osservatore inerziale il problema a regime non è stazionario, ma periodico. Per un osservatore non inerziale solidale con l'irrigatore, le quantità del problema non variano con il tempo e quindi a lui il problema a regime risulta stazionario;

nullo per simmetria. Si può dimostrare (TODO: riportare i dettagli) che il termine con la derivata temporale non genera un momento attorno all'asse z di rotazione dell'irrigatore, e scrivere

$$\begin{aligned} M_z^s &= -\hat{\mathbf{z}} \cdot \oint_{\partial V_t} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{b}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = (\dots) \\ &= -2\hat{\mathbf{z}} \cdot \oint_{S_1} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{b}) \cdot \hat{\mathbf{n}}, \end{aligned}$$

avendo riconosciuto che i contributi al momento delle superfici S_1 e S_2 sono uguali. Calcoliamo ora il termine di superficie, esprimendo tutti i termini nel sistema di coordinate solidale con l'irrigatore,

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r} = \Omega \hat{\mathbf{z}} \times (X\hat{\mathbf{X}} + Y\hat{\mathbf{Y}} + Z\hat{\mathbf{Z}}) = -\Omega Y\hat{\mathbf{X}} + \Omega X\hat{\mathbf{Y}} \\ (\mathbf{u} - \mathbf{b}) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \mathbf{u}_{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} = V\hat{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{X}} = V \\ \mathbf{r} \times \mathbf{u} &= \mathbf{r} \times (\mathbf{u}_{rel} + \mathbf{b}) = (X\hat{\mathbf{X}} + Y\hat{\mathbf{Y}} + Z\hat{\mathbf{Z}}) \times [(V - \Omega Y)\hat{\mathbf{X}} + \Omega X\hat{\mathbf{Y}}] = \\ &= -\Omega X Z\hat{\mathbf{X}} + (V - \Omega Y) Z\hat{\mathbf{Y}} + [\Omega(X^2 + Y^2) - VY]\hat{\mathbf{Z}}, \end{aligned}$$

e usando un sistema di coordinate polari con origine nel centro della sezione circolare S_1 ,

$$\begin{cases} X = h \\ Y = \ell + r \cos \theta \\ Z = r \sin \theta \end{cases}$$

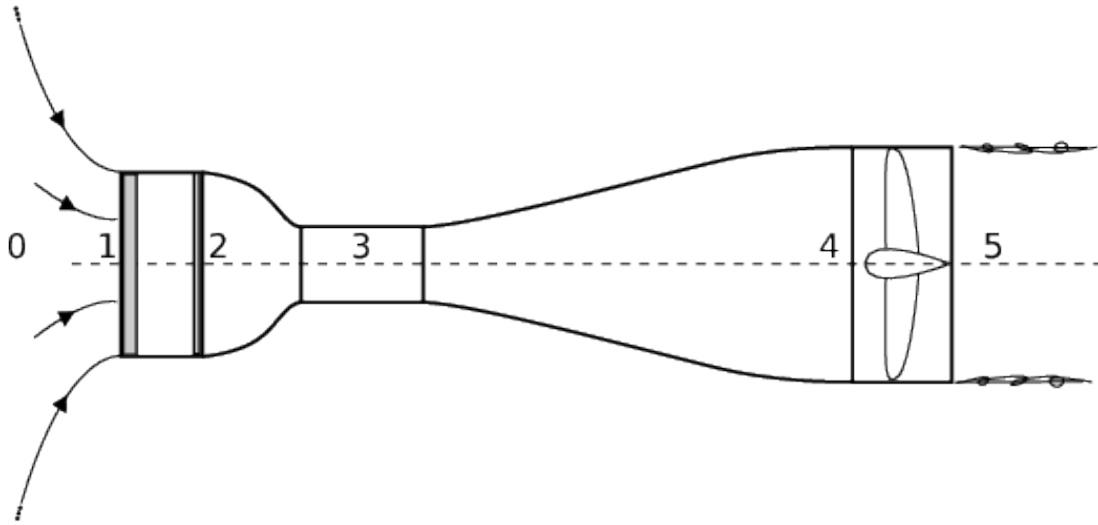
$$\begin{aligned} -\frac{M_z^s}{2} &= \hat{\mathbf{z}} \cdot \oint_{S_1} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{b}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \rho \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_1} [\Omega(h^2 + (\ell + r \cos \theta)^2) - V(\ell + r \cos \theta)] V r dr d\theta = \\ &= \rho [\Omega(h^2 + \ell^2) - V\ell] V 2\pi \frac{R_1^2}{2} + \Omega V \frac{R_1^4}{4} \pi = \\ &= \pi R_1^2 \rho V \left[\Omega \left(h^2 + \ell^2 + \frac{R_1^2}{4} \right) - V\ell \right]. \end{aligned}$$

A regime, la componente z della risultante dei momenti deve essere nulla e la velocità angolare deve essere uguale a

$$\Omega = \frac{\ell}{h^2 + \ell^2 + \frac{R_1^2}{4}} V \quad \rightarrow \quad \Omega = \frac{1}{2} \frac{\ell}{h^2 + \ell^2 + \frac{R_1^2}{4}} \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^2 U_0.$$

4.20.12 Exercise 4.11

Exercise 4.11 Viene chiesto di determinare la potenza dei motori della galleria a circuito aperto rappresentata in figura, sapendo che la velocità massima desiderata nella sezione di prova è $V_{test} = 30 \text{ m/s}$, l'area della sezione di prova è $A_{test} = 1.0 \text{ m}^2$ e l'area della sezione in cui è alloggiato il ventilatore che mette in moto l'aria è $A_{fan} = 2.0 \text{ m}^2$. Si supponga che la corrente sia incomprimibile e che la densità dell'aria sia $\rho = 1.1 \text{ kg/m}^3$. In una prima fase, si trascuri la caduta di pressione attraverso il nido d'ape e gli schermi presenti tra la sezione 1 e la sezione 2 del condotto. Successivamente si ripeta il calcolo con una caduta di pressione $P_1 - P_2 = k\rho U^2$, con $k = \dots$



Si studia la galleria a circuito aperto rappresentata in figura utilizzando i bilanci integrali scritti per alcuni volumi di controllo fissi, per ricavare l'andamento della velocità e della pressione all'interno della galleria e infine ricavare la potenza dei motori, necessaria per garantire le condizioni di progetto nella sezione di prova. Si ipotizza un funzionamento stazionario, si trascurano gli effetti viscosi nel volume e sulle pareti della galleria e le forze di volume. In particolare, grazie alle ipotesi fatte, si possono semplificare il bilancio di massa,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \rightarrow \quad \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 ,$$

e il bilancio dell'energia cinetica,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} &= - \oint_S \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_S \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \int_V \nabla \mathbf{u} : \mathbb{T} + \int_V \rho \mathbf{g} \\ &= - \oint_S \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_S \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} + \underbrace{\int_V p \nabla \cdot \mathbf{u}}_{=0, \text{ se } \nabla \cdot \mathbf{u}=0} - \underbrace{\int_V 2\mu \mathbb{D} : \mathbb{D}}_{=0, \text{ se } \mu=0} + \int_V \rho \mathbf{g} \\ &\rightarrow - \oint_S \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_S \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} = 0 . \end{aligned}$$

Viene svolta la prima parte dell'esercizio, trascurando le perdite di pressione che avvengono tra la sezione 1 e la sezione 2, a causa della presenza dei nidi d'ape e delle reti. Si scrive il bilancio di massa per un volume di fluido che ha come superficie di contorno la superficie S_0 , la superficie laterale del tubo di flusso e una superficie S_i all'interno della galleria. Assumendo grandezze uniformi sulla sezione, si può scrivere

$$\rho A_0 U_0 = \rho A_i U_i ,$$

cioè che il flusso di massa \dot{m} che attraversa le sezioni della galleria è costante. Se sono note le condizioni di progetto in camera di prova, da esser si può calcolare il flusso di massa,

$$\dot{m} = \rho A_3 U_3 = \rho A_{test} V_{test} = \dots .$$

Poiché la velocità all'infinito è nulla, $U_0 \rightarrow 0$, l'area della sezione all'infinito a monte deve tendere all'infinito $A_0 \rightarrow \infty$. Si scrive poi il bilancio di energia cinetica per un volume di controllo che ha come contorno la superficie S_0 all'infinito a monte, dove viene aspirata l'aria in uno stato di quiete, la superficie laterale del tubo di flusso, la superficie interna

della galleria e la sezione S_4 alla fine del divergente, poco prima dell'imbocco dei ventilatori. Poiché non ci sono organi meccanici in movimento, il termine $\oint_S \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u}$ è nullo, e assumendo grandezze fisiche costanti sulle sezioni si può scrivere,

$$\rho A_0 U_0 \left(\frac{U_0^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} \right) = \rho A_4 U_4 \left(\frac{U_4^2}{2} + \frac{P_4}{\rho} \right).$$

Poiché il flusso di massa che attraversa le sezioni considerate è costante, il bilancio di energia cinetica si riduce a un'espressione che ricorda quella del teorema di Bernoulli, così come viene enunciato alle scuole superiori,

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho U_0^2 = P_4 + \frac{1}{2} \rho U_4^2 \quad \rightarrow \quad B_4 = B_0 = P_{atm},$$

avendo introdotto la definizione del «binomio di Bernoulli», $B_i = P_i + \rho U_i^2/2$. Si scrive poi il bilancio di energia cinetica per il volume fluido $V(t)$ che contiene il ventilatore, delimitato dalle superfici S_4 , S_5 e la superficie interna della galleria e dalla superficie (mobile!) del ventilatore. Il bilancio diventa

$$\int_{S_4} \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} + \int_{S_5} \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} = \int_{S_{fan}} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u},$$

essendo il termine a destra dell'uguale la potenza delle forze esercitate dal ventilatore sul fluido, contraria a quella esercitata dal fluido sul ventilatore, ma uguale a quella che deve fornire il motore elettrico per poter garantire la rotazione del ventilatore stesso. Se si trascurano gli sforzi viscosi sulle superfici S_4 ed S_5 , $\mathbf{t}_n = \mathbf{s}_n - P\hat{\mathbf{n}}$, e se si esplicita la potenza che deve essere fornita dai motori, il bilancio diventa,

$$W_{mot} = \int_{S_4} \left(\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P \right) (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) + \int_{S_5} \left(\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P \right) (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}),$$

e facendo l'ipotesi di grandezze fisiche costanti sulle sezioni,

$$W_{mot} = \rho A_5 U_5 \left(\frac{U_5^2}{2} + \frac{P_5}{\rho} \right) - \rho A_4 U_4 \left(\frac{U_4^2}{2} + \frac{P_4}{\rho} \right) = \dot{m} (B_5 - B_4).$$

Ricordando che il «binomio di Bernoulli» nelle sezioni 1:4 è uguale al «binomio di Bernoulli» nella sezione S_0 , e quindi uguale alla pressione ambiente P_{atm} , nell'ipotesi che la pressione nella sezione S_5 sia uguale alla pressione atmosferica P_{atm} all'esterno del tubo di flusso, la potenza del motore diventa,

$$W_{mot} = \dot{m} \frac{U_5^2}{2},$$

e, riferendosi alle grandezze fisiche in camera di prova, può essere scritta come

$$\begin{aligned} W_{mot} &= \dot{m} \left(\frac{A_{test}}{A_{fan}} \right)^2 \frac{V_{test}^2}{2} \\ &\rightarrow W_{mot} = \frac{1}{2} \rho A_{test} \left(\frac{A_{test}}{A_{fan}} \right)^2 V_{test}^3 = \dots kW. \end{aligned}$$

La formula della potenza dei motori necessaria al funzionamento della galleria mette in evidenza la dipendenza dal cubo della velocità di prova e dal quadrato del rapporto tra l'area della sezione di prova e l'area della sezione all'imbocco delle ventole. Questo ultimo termine dovrebbe chiarire uno degli obiettivi del divergente della galleria: rallentare la corrente dopo la sezione di prova, per poter ridurre la potenza dei motori da installare per garantire il funzionamento dell'impianto. **Osservazione.** Potrebbe suscitare qualche perplessità il fatto che la corrente in uscita dall'impianto con velocità $U_5 \simeq V_{fan}$ abbia una pressione uguale alla pressione ambiente, P_{atm} , come il fluido in quiete all'esterno del tubo di flusso. Provando ad applicare il teorema di Bernoulli tra un punto sulla sezione del tubo di flusso S_5 e un punto all'esterno del tubo di flusso,

$$P_5 + \frac{1}{2} \rho V_{fan}^2 = P_5^{out} \quad \rightarrow \quad P_{atm} + \frac{1}{2} \rho V_{fan}^2 = P_{atm},$$

si giungerebbe alla conclusione che $V_{fan} = 0$. L'errore risiede nell'applicazione del teorema di Bernoulli nella formula vista alla scuola superiore (o in altri corsi universitari), nonostante alcune ipotesi (che verranno presentate nel prosieguo del corso) non siano rispettate. In particolare, per collegare un punto sulla sezione S_5 e un punto all'esterno del tubo di flusso viene attraversato uno strato di mescolamento tra la corrente in moto che esce dalla galleria e il fluido in quiete all'esterno: la presenza di questo strato di mescolamento, nel quale la corrente non è irrotazionale $\vec{\omega} \neq 0$, fa cadere le ipotesi del teorema di Bernoulli e lo rende quindi inapplicabile. Tutte le parti evidenziate in rosso devono quindi essere considerate errate.

4.20.13 Exercise 4.12

Exercise 4.12 Il funzionamento di un motore alternativo a benzina (a quattro tempi) può essere rappresentato in prima approssimazione con un ciclo termodinamico Otto ideale, rappresentato da una compressione adiabatica, una fase veloce di combustione a volume costante (nel punto morto superiore del moto del pistone, PMS) e un'espansione adiabatica. Le fasi di aspirazione e scarico dei gas combusti sono anch'essi ideali. L'aspirazione avviene a pressione costante durante il movimento del pistone dal PMS al punto morto inferiore (PMI). La fase di scarico avviene in due fasi: durante la prima fase la pressione diminuisce molto velocemente (approssimata da una trasformazione a volume costante) a causa dell'apertura della valvola di scarico quando il pistone si trova al PMI; durante la seconda fase i gas combusti sono spinti fuori dalla camera di combustione dal movimento ascendente del pistone che si riporta al PMS, per l'inizio del ciclo termodinamico successivo. Del motore sono noti:

- il rapporto di compressione, definito come il rapporto tra il volume massimo (pistone al PMI) e minimo (pistone al PMS) della camera di combustione, $r = V_1/V_2 = 10$;
- la cilindrata, definita come la corsa del pistone per l'area della sezione del cilindro, e uguale alla differenza $C = N(V_2 - V_1) = 1000 \text{ cc}$, essendo N il numero di cilindri del motore;
- le condizioni termodinamiche dell'aria all'aspirazione $P_0 = 85570 \text{ Pa}$, $T_0 = 25^\circ\text{C}$;
- il rapporto in massa tra benzina e aria, $f = m_f/m_a = 0.06$;
- il potere calorifico della benzina usata $\Delta h = 43 \text{ MJ}$;
- la pressione nel basamento del motore, $p_b = 150000 \text{ Pa}$ uniforme e costante.

Si calcoli la potenza media erogata dal motore a un regime di rotazione di $\Omega = 3000 \text{ RPM}$, assumendo un rendimento meccanico $\eta = 0.8$. Si rappresenti l'aria come un gas bi-atomico perfetto ($\gamma = c_p/c_v = 1.4$) con costante dei gas $R = 287 \text{ J/(kg K)}$, e si trascuri l'effetto del carburante sul valore dei calori specifici e sulla massa presente all'interno della camera di combustione. Si trascurino inoltre gli scambi di calore per conduzione con l'esterno del cilindro durante la compressione e l'espansione (trasformazioni adiabatiche). Si trascurino i termini cinetici nell'energia totale in camera di combustione, facendo coincidere l'energia totale con l'energia interna $e^t = e = c_v T$, e si assuma che le variabili termodinamiche siano uniformi (costanti in spazio, non in tempo) in camera di combustione.

Ogni fase del ciclo termodinamico viene analizzata con i bilanci integrali, per il volume corrispondente alla camera di combustione di un cilindro. Questo volume è un sistema aperto durante la fase di aspirazione e scarico (scambia massa con l'esterno), mentre è un sistema chiuso durante la compressione, la combustione e l'espansione (valvole chiuse, nessuno scambio di massa con l'esterno). Si calcola il lavoro svolto dal sistema durante un ciclo e si divide per il periodo per ricavare la potenza media.

Conoscendo il numero dei cilindri $N = 3$, il rapporto di compressione r e la cilindrata C è possibile ricavare il valore del volume massimo V_1 e minimo V_2 della camera di combustione.

$$\begin{cases} N(V_2 - V_1) = C \\ V_1/V_2 = r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_1 = \frac{r}{r-1} \frac{C}{N} \\ V_2 = \frac{1}{r-1} \frac{C}{N} \end{cases}$$

Si analizzano ora le fasi del ciclo termodinamico, fornendo una breve descrizione e ponendo attenzione allo scambio di massa (sistema chiuso/aperto), lavoro e calore con l'esterno.

- **Aspirazione**, $0 \rightarrow 1$: la prima fase del ciclo Otto è l'aspirazione. Durante la fase di aspirazione (ideale), la valvola di aspirazione è aperta e il sistema scambia massa con l'esterno: il pistone si sposta dal PMS al PMI e la camera di combustione si riempie d'aria a pressione e temperatura costante,

$$p_1 = p_0 \quad , \quad T_1 = T_0 \quad , \quad \rho_1 = \rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} =$$

La massa contenuta nella camera di combustione alla chiusura della valvola, in coincidenza del PMI, è

$$m = \rho_1 V_1 = \dots .$$

Durante la fase di aspirazione, il pistone deve vincere la sovrappressione del basamento (di solito la pressione nel basamento è superiore a quella aspirata in camera di combustione). Dal PMS al PMI un pistone assorbe parte della potenza fornita dagli altri pistoni. Il lavoro che assorbe è $L_{01} = -(p_b - p_0)c$ (negativo poichè assorbito), essendo c la corsa del pistone e la differenza di pressione costante durante l'aspirazione. Questo lavoro assorbito durante l'aspirazione sarà uguale e contrario a quello fornito durante lo scarico ideale dei gas, che avviene alla stessa differenza di pressione con un moto opposto.

- **Compressione**, $1 \rightarrow 2$: la seconda fase del ciclo termodinamico è la compressione del fluido che avviene a causa del movimento verso l'alto del pistone. Il sistema è chiuso: le valvole sono chiuse e si ipotizza che non ci sia trafileamento (*blow-by*) tra il pistone e la superficie laterale del cilindro. Il bilancio di energia totale per il fluido contenuto all'interno del volume $V(t)$ (variabile nel tempo, a causa del moto del pistone) della camera di combustione,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e^t + \oint_{S(t)} \rho e^t (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{S(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{S(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{V(t)} \rho r .$$

può essere semplificato, trascurando l'effetto delle forze di volume, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, trascurando la trasmissione del calore con l'esterno (trasformazione adiabatica), $\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, e non essendoci sorgenti di calore, $r = 0$. Inoltre non c'è flusso di massa attraverso il contorno $S(t)$ del volume, $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, e l'unica superficie in movimento della camera di combustione corrisponde al cielo (la faccia superiore) del pistone, S_c . Trascurando il contributo cinetico e approssimando l'energia totale $e^t = e + |\mathbf{u}|^2/2$ con l'energia interna e , il bilancio di energia diventa,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e = \int_{S_c(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} ,$$

legando la derivata temporale dell'energia del fluido nella camera di combustione alla potenza delle forze esercitate dal pistone sul fluido. La potenza delle forze agenti sul pistone è uguale all'integrale superficiale del prodotto scalare vettore sforzo $\mathbf{t}_{n,s}$ agente sul solido per la velocità \mathbf{v} della superficie del solido,

$$\begin{aligned} W_{12} &= \oint_{S_s} \mathbf{t}_{n,s} \cdot \mathbf{v} = \int_{S_{s,c}} \mathbf{t}_{n,s} \cdot \mathbf{v} + \int_{S_{s,b}} \mathbf{t}_{n,s} \cdot \mathbf{v} + \int_{S_{s,lat}} \mathbf{t}_{n,s} \cdot \mathbf{v} = \\ &= - \int_{S_c} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \int_{S_{s,b}} p_b \hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{v} , \end{aligned}$$

avendo suddiviso la superficie del cilindro S_s come l'unione della superficie superiore $S_{s,c}$ (cielo), superficie laterale $S_{s,lat}$ (dal contributo nullo, per simmetria), e superficie inferiore $S_{s,b}$ esposta verso il basamento del motore, sulla quale agisce uno sforzo dovuto alla pressione p_b dell'ambiente all'interno del basamento. È stato indicata con $\hat{\mathbf{n}}_s$ la normale uscente dalla superficie del solido e con $\mathbf{t}_{n,s}$ il vettore sforzo agente su un punto della superficie del solido, uguale e contrario a quello agente sul fluido $\mathbf{t}_n = -\mathbf{t}_{n,s}$ per il principio di azione e reazione. Inoltre, le condizioni al contorno impongono che il fluido e il solido abbiano la stessa velocità $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ sulle superfici di contatto. Si può quindi riscrivere il bilancio di energia del fluido in funzione della potenza W_{12} trasmessa al pistone,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e = -W_{12} - p_b S_c v(t) = -W_{12} - p_b \frac{dV}{dt} ,$$

essendo $v(t)$ la velocità del pistone, per ottenere la potenza trasmessa al pistone dal fluido (sarà una potenza richiesta, < 0),

$$\begin{aligned} W_{12}(t) &= -\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e - p_b \frac{dV}{dt} = \\ &= -\frac{d}{dt} (\rho V e) - p_b \frac{dV}{dt} = \\ &= -m \frac{de}{dt} - p_b \frac{dV}{dt}, \end{aligned}$$

nell'ipotesi di variabili termodinamiche uniformi nel volume, ricordando che la massa contenuta nella camera di combustione $m = \rho V$ rimane costante, essendo un sistema chiuso, se si trascura l'effetto di trafileamento tra le pareti di cilindro e pistone (ridotte al minimo da fasce elastiche e anelli raschiaolio sul pistone e sovra-pressione nel basamento). Integrando in tempo la potenza istantanea $W_{12}(t)$, tra il punto 1 e il punto 2 del ciclo, si ottiene il lavoro di compressione

$$L_{12} = -m(e_2 - e_1) - p_b(V_2 - V_1).$$

Utilizzando la legge di stato dei gas perfetti $p = \rho RT$ e il legame tra le variabili termodinamiche durante una trasformazione adiabatica $p/\rho^\gamma = \text{cost}$, si ottiene

$$e_2 - e_1 = c_v(T_2 - T_1) = c_v T_1 \left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] = c_v T_1 (r^{\gamma-1} - 1).$$

- **Combustione**, 2 \rightarrow 3: la terza fase del ciclo termodinamico è la combustione. Viene iniettato il combustibile all'interno della camera di combustione, innescata dall'accensione di una candela in un motore a benzina classico. Durante l'iniezione del combustibile il sistema è aperto. In prima approssimazione si può trascurare la variazione di massa, $m + m_f = m(1 + f) \simeq m$. In prima approssimazione, si può rappresentare questa fase con una trasformazione isocora (volume costante) associata a un aumento di pressione e temperatura, a causa di una combustione (completa) veloce in corrispondenza del PMS. Il bilancio di energia che descrive questa fase diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e &= \int_{V(t)} \rho r \\ m \frac{de}{dt} &= \dot{m}_f \Delta h \quad \rightarrow \quad e_3 - e_2 = \frac{m_f}{m} \Delta h = f \Delta h. \end{aligned}$$

Utilizzando l'espressione dell'energia interna $e = c_v T$,

$$c_v T_3 = c_v T_2 + f \Delta h.$$

- **Espansione**, 3 \rightarrow 4: la quarta fase del ciclo è l'espansione. Trascurando gli scambi di calore con l'esterno, la trasformazione è adiabatica. Facendo le stesse ipotesi fatte per la fase di compressione, si ottiene un lavoro di espansione (fornito al pistone, > 0)

$$L_{34} = -m(e_4 - e_3) - p_b(V_4 - V_3).$$

Utilizzando la legge di stato dei gas perfetti $p = \rho RT$ e il legame tra le variabili termodinamiche durante una trasformazione adiabatica $p/\rho^\gamma = \text{cost}$, si ottiene

$$\begin{aligned} e_4 - e_3 &= c_v(T_4 - T_3) = \\ &= c_v T_3 \left[\left(\frac{\rho_4}{\rho_3} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] = \\ &= c_v T_3 (r^{-\gamma+1} - 1) = \\ &= c_v T_2 (r^{-\gamma+1} - 1) + f \Delta h (r^{-\gamma+1} - 1) = \\ &= c_v T_1 (1 - r^{\gamma-1}) + f \Delta h (r^{-\gamma+1} - 1) = . \end{aligned}$$

- **Scarico**, $4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 6$: la fase di scarico (libera) è considerata istantanea e quindi non viene compiuto lavoro da parte del fluido sul sistema meccanico. Durante la fase di scarico forzata, mentre si muove dal PMI al PMS, il pistone compie un lavoro $L_{46} = (p_b - p_0)c$, uguale e contrario a quello compiuto durante la fase di aspirazione se la pressione di aspirazione e di scarico sono uguali ($p_0 = p_1 = p_5$).

Il lavoro complessivo fornito dal fluido al sistema meccanico durante un ciclo è quindi uguale a

$$L = L_{12} + L_{34} = \dots = f m \Delta h (1 - r^{-\gamma+1}) .$$

Il risultato ottenuto può essere facilmente interpretato in termini termodinamici, essendo $Q_{in} = f m \Delta h$ il calore fornito alla macchina termica e $\eta = 1 - r^{-\gamma+1}$ il rendimento del ciclo Otto espresso in funzione del rapporto di compressione r ,

$$L = \eta Q_{in} .$$

Nonostante il risultato ottenuto non sia nuovo, lo svolgimento dovrebbe fornire uno svolgimento più dettagliato che parta dai principi fisici, rappresentati dai bilanci integrali, ed evidenziare il ruolo delle ipotesi fatte per ricavare il risultato, come ad esempio l'assenza di flussi di calore durante la fase di compressione e espansione adiabatica. Per ottenere la potenza media fornita dal motore, bisogna moltiplicare il lavoro L fornito da un pistone per il numero N dei cilindri del motore e dividere per il periodo del ciclo $T = \frac{2\pi n}{\Omega}$, essendo Ω la velocità di rotazione dell'albero motore ed $n = 4$ il numero dei tempi del motore,

$$W = \frac{NL}{T} = \frac{\Omega}{n\pi} f \Delta h \rho_1 N V_1 (1 - r^{1-\gamma}) ,$$

e introducendo la definizione di cilindrata,

$$W = \frac{NL}{T} = \frac{\Omega}{n\pi} f \Delta h \rho_1 C \frac{r}{r-1} (1 - r^{1-\gamma}) = 43.14 \text{ kW} = 58.6 \text{ CV} .$$

4.20.14 Exercise 4.13

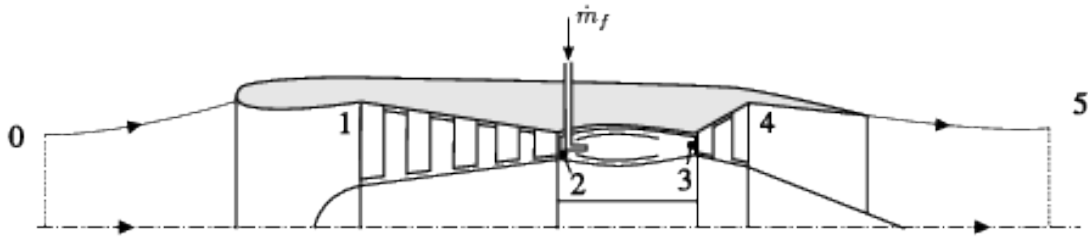
Exercise 4.13 Un aereo vola alla velocità $V = 250 \text{ m/s}$ alla quota $z = 10000 \text{ m}$, dove la pressione e la temperatura atmosferica sono $P_0 = 26500 \text{ Pa}$ e $T_0 = 223.25 \text{ K}$, spinto dal motore a getto rappresentato in figura. Sapendo che:

- $0 \rightarrow 1$: la presa d'aria è progettata per ottenere una compressione adiabatica ideale (isentropica), con $P_1/P_0 = 1.5$;
- $1 \rightarrow 2$: il compressore ideale ha una sezione di ingresso $A_1 = \dots$ e produce un rapporto di pressione totale $P_2^t/P_1^t = 40.0$, tramite una trasformazione adiabatica ideale;
- $2 \rightarrow 3$: il combustore garantisce una perfetta combustione mantenendo costante la pressione totale al suo interno $P_2^t = P_3^t$; il flusso di calore prodotto dalla combustione è uguale a $\dot{Q}_c = \dot{m}_f \Delta h_c$, dove \dot{m}_f è il flusso di massa di combustibile e $\Delta h_c = 46 \text{ MJ/kg}$ il suo potere calorifico; la temperatura totale all'ingresso della turbina è $T_4^t = 1600 \text{ K}$;
- $3 \rightarrow 4$: nella turbina avviene un'espansione adiabatica ideale, in modo tale da garantire la potenza necessaria a mantenere in moto il compressore;
- $4 \rightarrow 5$: nell'ugello avviene un'espansione adiabatica ideale, che porta il gas a espandersi fino alla pressione ambiente $P_5 = P_0$.

Si considerino tutti i componenti meccanici ideali, si trascurino gli effetti viscosi dove possibile e si consideri l'aria e la miscela di gas combusti come un gas biatomico ideale, con costante dei gas $R = 287 \text{ J/(kg K)}$ e calori specifici costanti.

Viene chiesto di calcolare:

- il rapporto in massa tra flusso di combustibile e flusso di aria, $f = \dot{m}_f/\dot{m}_a$;
- la spinta T fornita dal motore.



Durante lo svolgimento dell'esercizio vengono utilizzati i bilanci integrali di massa,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho + \oint_{S(t)} \rho(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 ,$$

quantità di moto,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} + \oint_{S(t)} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V(t)} \mathbf{f} + \oint_{S(t)} \mathbf{t}_n ,$$

ed energia totale,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e^t + \oint_{S(t)} \rho e^t(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{S(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{S(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{V(t)} \rho r .$$

In particolare, il bilancio di quantità di moto permette di ricavare la formula della spinta del motore in funzione del flusso di quantità di moto attraverso un volume di controllo opportunamente scelto. Il bilancio di energia totale permette di analizzare i singoli componenti del motore.

Per risolvere il problema, è necessario ricavare la spinta del motore in funzione della portata massica trattata e della differenza di velocità del fluido in ingresso e in uscita dal motore. Successivamente viene analizzato il sistema motore per calcolare la velocità di efflusso dei gas. Si considera il problema stazionario, con forze di volume \mathbf{f} trascurabili. Si svolge uno studio «quasi-1D» considerando variabili uniformi sulle varie sezioni del motore.

Formula della spinta.

Nell'ipotesi che la pressione dei gas in uscita dall'ugello sia uguale alla pressione ambiente, il bilancio di quantità di moto del fluido trattato dal motore permette di ottenere la stima della trazione generata dal motore,

$$T = \dot{m}_5 V_5 - \dot{m}_0 V_0 = \dot{m}_0 (V_5 - V_0) + \dot{m}_f V_5 .$$

Per ricavare la trazione T è necessario ricavare i valori del flusso di massa d'aria ingerito dal motore, il flusso di combustibile e la velocità di efflusso dei gas combusti, studiando in dettaglio il fluido all'interno del motore

Analisi del motore.

Si studia l'evoluzione della corrente che attraversa il motore.

- $0 \rightarrow 1$, presa d'aria: l'aria che appropria l'ingresso del compressore S_1 subisce una compressione libera adiabatica ideale. Dato lo stato termodinamico TD(0), con $\rho_0 = P_0/(RT_0) = 0.414 \text{ kg/m}^3$, e il rapporto di pressione P_1/P_0 , è possibile calcolare lo stato termodinamico TD(1):

$$P_1 = \left(\frac{P_1}{P_0}\right) P_0 = 39750 \text{ Pa} \quad , \quad \rho_1 = \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \rho_0 = 0.553 \text{ kg/m}^3 .$$

Una volta note la pressione e la densità, è possibile calcolare la temperatura e l'entalpia del fluido,

$$T_1 = \frac{P_1}{RT_1} = 250.67 \text{ K} \quad , \quad h_1 = c_p T_1 = 2.52 \cdot 10^5 \text{ J/kg} .$$

Si calcola ora il flusso di massa che entra nel volume,

$$\dot{m}_0 = \dot{m}_1 \quad , \quad \rho_0 V_0 A_0 = \rho_1 V_1 A_1 .$$

Si calcola il flusso di massa utilizzando la sezione 1. Poiché non ci sono organi meccanici che assorbono o forniscono potenza, non ci sono sorgenti di calore e possono essere trascurati gli effetti viscosi, tra le sezioni 0 e 1 si conserva il flusso di entalpia totale,

$$\dot{m}_0 h_0^t = \dot{m}_1 h_1^t \quad \rightarrow \quad h_0^t = h_1^t = h_1 + \frac{V_1^2}{2} = 2.56 \cdot 10^5 \text{ J/kg} .$$

$$\rightarrow \quad V_1 = \sqrt{2(h_0^t - h_1)} = 86.09 \text{ m/s}$$

$$\dot{m}_1 = \rho_1 A_1 V_1 = 47.57 \text{ kg/s}$$

- $1 \rightarrow 2$, compressore: lo stato termodinamico totale in uscita del compressore è legato allo stato totale in ingresso da una trasformazione isentropica,

$$P_2^t = \left(\frac{P_2^t}{P_1^t}\right) P_1^t = 1.67 \cdot 10^6 \text{ Pa} \quad , \quad T_2^t = \left(\frac{P_2^t}{P_1^t}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_1^t = 729.76 \text{ K} .$$

Trascurando gli effetti viscosi sulla superficie di ingresso e di uscita del compressore, in assenza di scambi di calore, la potenza fornita dal compressore al fluido vale

$$W_{12} = \dot{m}_1 (h_2^t - h_1^t) = 22.72 \text{ MW} .$$

- $2 \rightarrow 3$, combustore: la temperatura totale $T_3^t = \dots$ in ingresso alla turbina è un dato del problema determinato dai limiti tecnologici legati alla realizzazione delle palette del rotore della turbina e al fenomeno di creeping. Nel combustore non ci sono organi meccanici in movimento che forniscano o assorbano potenza dal fluido. Si trascurano gli effetti viscosi e le forze di volume. Se si ipotizza la combustione completa del combustibile iniettato come origine del calore generato e si trascura il flusso di entalpia totale attraverso l'iniettore, il bilancio di energia totale in regime stazionario diventa

$$\dot{m}_3 h_3^t - \dot{m}_2 h_2^t - \underbrace{\dot{m}_f h_f^t}_{\approx 0} = \dot{Q}_c = \dot{m}_f \Delta h_c .$$

Poiché il flusso di massa dei gas combusti uscenti dal combustore \dot{m}_3 è uguale alla somma del flusso d'aria \dot{m}_2 e il flusso di combustibile \dot{m}_f entranti,

$$\dot{m}_3 = \dot{m}_2 + \dot{m}_f ,$$

il rapporto tra il flusso di massa del combustibile e dell'aria diventa,

$$f := \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_2} = \frac{h_3^t - h_2^t}{\Delta h_c - h_3^t} = \frac{T_3^t - T_2^t}{\Delta h_c / c_P - T_3^t} = 0.0197 .$$

Se si ipotizza che la pressione totale rimanga costante all'interno del combustore, lo stato termodinamico totale in uscita dal combustore è determinato dal valore della pressione e della temperatura totale, P_3^t e T_3^t ,

$$\rho_3^t = \frac{P_3^t}{RT_3^t} = 3.64 \text{ kg/m}^3 \quad , \quad h_3^t = c_P T_3^t = 1.61 \cdot 10^6 \text{ J/kg} .$$

- 3 → 4, turbina: la turbina deve generare la potenza W_{34} necessaria a muovere il compressore,

$$W_{12} + W_{34} = 0 .$$

Se si trascurano gli effetti viscosi e si ipotizza un processo adiabatico, la potenza della turbina è uguale alla differenza del flusso di entalpia totale tra l'uscita e l'ingresso della turbina,

$$W_{34} = \dot{m}_3 (h_4^t - h_3^t) .$$

L'entalpia totale all'uscita della turbina vale

$$h_4^t = h_3^t - \frac{1}{1+f} (h_2^t - h_1^t) = 1.13 \cdot 10^6 \text{ J/kg} \quad \rightarrow \quad T_4^t = 1124.6 \text{ K} .$$

La trasformazione isentropica lega lo stato termodinamico totale TD(3) in ingresso alla turbina allo stato termodinamico totale TD(4) in uscita,

$$P_4^t = \left(\frac{T_4^t}{T_3^t} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} P_3^t = 4.87 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\rho_4^t = 1.51 \text{ kg/m}^3 .$$

- 4 → 5, ugello: se si considera un'espansione libera nell'ugello ideale, trascurando gli effetti viscosi e gli scambi di calore, il bilancio dell'energia totale in assenza di organi meccanici che generino o assorbano potenza dal fluido equivale alla conservazione del flusso dell'entalpia totale,

$$\dot{m}_4 h_4^t = \dot{m}_5 h_5^t \quad \rightarrow \quad h_4^t = h_5 + \frac{V_5^2}{2} \quad \rightarrow \quad V_5 = \sqrt{2(h_4^t - h_5)}$$

Se l'ugello non è bloccato la pressione dei gas in uscita è uguale alla pressione atmosferica, $P_5 = P_0$. La trasformazione isentropica tra 4 e 5, permette di ricavare lo stato termodinamico TD(5),

$$\rho_5 = \left(\frac{P_5}{P_4^t} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \rho_4^t = 0.189 \text{ kg/m}^3$$

$$T_5 = 489.5 \text{ K} \quad \rightarrow \quad h_5 = 4.92 \cdot 10^5 \text{ J/kg} .$$

La velocità di efflusso dei gas combusti vale quindi

$$V_5 = \sqrt{2(h_4^t - h_5)} = 1129.6 \text{ m/s} .$$

La spinta fornita dal motore in questa condizione di volo vale

$$T = \dot{m}_5 V_5 - \dot{m}_0 V_0 = 42.90 \text{ kN} .$$

4.20.15 Weighting a hidden bird

Exercise 4.11 Un uccello si trova in una gabbia chiusa di volume interno V_c e di massa m_c . Si chiede di determinare la massa dell'uccello. Il riferimento della lettura della bilancia è posto a zero quando sul piatto della bilancia non è posto nessun oggetto. La lettura della bilancia cambia a seconda che l'uccello sia appoggiato alla parete inferiore o sia in volo? Mentre l'uccello è in volo, si può calcolare la componente verticale della forza generata dall'uccello?

Si consideri il fluido incomprimibile di densità costante e uniforme ρ_a all'interno della scatola. Si discuta il caso in cui l'uccello può essere considerato di densità uniforme ρ_b , così che il centro geometrico dell'uccello coincide con il suo centro di massa. Si trascuri lo spostamento del piatto della bilancia. Si consideri uniforme la pressione atmosferica P_a che agisce sulle pareti esterne della gabbia e su tutte le superficie del piatto della bilancia.



TL;DR. La bilancia misura il peso del volatile anche quando in volo, ma anche l'accelerazione in direzione verticale del volatile e il moto dell'aria all'interno della gabbia.

Soluzione. Si considera il sistema chiuso formato dal piatto della bilancia, dalla gabbia, e dall'aria e dall'uccello contenuti in essa. Il secondo principio della dinamica per questo sistema chiuso mette in relazione la derivata della quantità di moto \mathbf{Q} del sistema e la risultante delle forze esterne \mathbf{R}^{ext} agenti su di esso,

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}^{ext} .$$

La risultante delle forze esterne al sistema è la somma del peso dei sottosistemi, della pressione atmosferica agente sulla superficie esterna e della reazione del piatto della bilancia. Nell'ipotesi che la pressione agente sul sistema sia uniforme, la risultante della pressione atmosferica agente sul sistema non sposta la lettura della bilancia (vedi sotto),

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{ext} &= \mathbf{F} + \mathbf{P} = \\ &= \mathbf{F} + m_0\mathbf{g} + m_c\mathbf{g} + m_a\mathbf{g} + m_b\mathbf{g} . \end{aligned}$$

Dal secondo principio della dinamica, la reazione vincolare della bilancia vale

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{P} ,$$

equilibrando il peso e la derivata nel tempo della quantità di moto.

Una stima più dettagliata. Assumendo di aver fatto la tara in assenza del volatile nella gabbia, la reazione della bilancia di riferimento si ottiene dalle condizione di equilibrio

$$\mathbf{F}_0 = -m_0\mathbf{g} - m_c\mathbf{g} - \rho_a(V_a + V_b)\mathbf{g},$$

con il volume della gabbia V_c uguale alla somma del volume del volatile V_b e quello occupato dall'aria V_a , $V_c = V_a + V_b$. La risultante della bilancia può essere riscritta come

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{ext} &= \mathbf{F} - \mathbf{F}_0 + m_b\mathbf{g} - \rho_a V_b\mathbf{g} = \\ &= \Delta\mathbf{F} + (m_b - \rho_a V_b)\mathbf{g} = \\ &= \Delta\mathbf{F} + (\rho_b - \rho_a) V_b\mathbf{g}. \end{aligned}$$

La quantità di moto del sistema è la somma della quantità di moto dei suoi componenti: piatto bilancia, gabbia, aria, volatile. Nel caso in cui il movimento del piatto della bilancia sia trascurabile, anche la struttura della gabbia può essere considerata in quiete.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_a + \mathbf{Q}_b = \\ &= m_a\mathbf{u}_a + m_b\mathbf{u}_b = \\ &= m_a\mathbf{u}_a^g + m_b\mathbf{u}_b = \\ &= m_a\dot{\mathbf{r}}_a^g + m_b\dot{\mathbf{r}}_b, \end{aligned}$$

poiché il centro geometrico del volume di aria e il suo centro di massa coincidono nell'ipotesi di fluido a densità uniforme, e quindi anche le loro velocità, $\mathbf{u}_a^g = \mathbf{u}_a$.

Usando il secondo principio della dinamica con le espressioni della quantità di moto e della risultante delle forze esterne, si ricava l'espressione della lettura della bilancia $\Delta\mathbf{F}$, in funzione delle proprietà di inerzia di aria e volatile e dello stato di moto del volatile (e dell'aria),

$$\Delta\mathbf{F} = -m_b\mathbf{g} + m_b\ddot{\mathbf{r}}_b + m_a\ddot{\mathbf{r}}_a^g + \rho_a V_b\mathbf{g}.$$

La lettura della bilancia è quindi influenzata dal moto del volatile e dell'aria all'interno della gabbia. Nel caso in cui il volatile vola a quota costante, la lettura della bilancia coincide esattamente con il peso del volatile (meno il peso di un volume d'aria uguale al volume del volatile, che veniva pesato durante l'operazione di tara definita sopra). Nel caso in cui la massa dell'aria sia trascurabile rispetto alla massa dell'uccello, e la densità media minore $\rho_a \ll \rho_b$, si ottiene $\Delta\mathbf{F} = m_b(-\mathbf{g} + \ddot{\mathbf{r}}_b)$, o la componente verticale $F_z = m_b(g + a_{z,b})$.

Ma si può trascurare il moto dell'aria? L'ipotesi di massa dell'aria trascurabile rispetto alla massa del volatile va comunque verificata: una gabbia cubica di lato 50 cm contiene circa 150g di aria, un fringuello pesa circa 30 g, un piccione circa 300 g.

Caso particolare: uccello di densità uniforme. Nel caso di densità uniforme del volatile, la sua massa può essere espressa come prodotto di volume e densità, $m_b = \rho_b V_b$, e il centro di massa del volatile coincide con il suo centro geometrico (vedi sotto); si può esprimere l'accelerazione del centro geometrico del volume d'aria in funzione del centro di massa del volatile,

$$\mathbf{r}_a^g = -\frac{V_b}{V_a}\mathbf{r}_b,$$

e ottenere la seguente espressione della lettura della bilancia

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{F} &= -m_b\mathbf{g} + m_b\ddot{\mathbf{r}}_b + m_a\left(-\frac{V_b}{V_a}\ddot{\mathbf{r}}_b\right) + \rho_a V_b\mathbf{g} = \\ &= -m_b\mathbf{g} + \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_b}\right) m_b\ddot{\mathbf{r}}_b + \frac{\rho_a}{\rho_b} m_b\mathbf{g} = \\ &= -m_b\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_b}\right) (\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{r}}_b). \end{aligned}$$

Forza aerodinamica agente sul volatile.

$$\dot{\mathbf{Q}}_b = \mathbf{R}^{ext,b} = \mathbf{F}^{aero} + \mathbf{P}_b .$$

Una volta calcolata la massa del volatile m_b da una lettura costante della bilancia, in seguito risulta possibile (immediato nel caso di densità uniforme del volatile, invertendo la formula) misurare l'accelerazione del volatile $\ddot{\mathbf{r}}_b$ dalla lettura della bilancia $\Delta\mathbf{F}$. Risulta quindi possibile misurare la forza aerodinamica agente sul volatile

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{aero} &= \dot{\mathbf{Q}}_b - \mathbf{P}_b = \\ &= m_b (\ddot{\mathbf{r}}_b(\Delta\mathbf{F}) - \mathbf{g}) . \end{aligned}$$

Nel caso di volatile posato sul pavimento o in volo con centro di massa in quiete, la forza aerodinamica equilibra il peso, $\mathbf{F}^{aero} = -\mathbf{P}_b$.

Quantità di moto dell'aria

Il centro di massa del volume d'aria $V_a(t)$ contenuto all'interno della gabbia è

$$\mathbf{r}_a(t) := \frac{1}{m_a} \int_{V_a(t)} \rho_a(t) \mathbf{r} = \frac{1}{|V_a(t)|} \int_{V_a(t)} \mathbf{r} =: \mathbf{r}_a^g(t) ,$$

con $m_a = \rho_a |V_a(t)|$: il sotto-sistema aria è chiuso, e quindi ha massa costante; nell'ipotesi di densità costante, anche il volume d'aria contenuto è costante, $|V_a(t)| = |V_a|$.

Usando il teorema del trasporto di Reynolds per la derivata rispetto al tempo di integrali di volume, si trova l'espressione della velocità del centro di massa del volume d'aria

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_a^g(t) &= \frac{d\mathbf{r}_a^g}{dt} = \\ &= \frac{1}{|V_a|} \frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \mathbf{r} = \\ &= \frac{1}{|V_a|} \left\{ \underbrace{\int_{V_a(t)} \partial_t \mathbf{r}}_{=0} + \int_{\partial V_a(t)} \mathbf{r} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right\} = \\ &= \frac{1}{|V_a|} \int_{V_a(t)} \mathbf{u} , \end{aligned}$$

avendo usato il teorema della divergenza e l'incomprimibilità del fluido

$$\left\{ \int_{\partial V} \mathbf{r} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right\}_i = \int_{\partial V} r_i u_k n_k = \int_V \partial_k (r_i u_k) = \int_V \delta_{ik} u_k + \int_V r_i \underbrace{u_{k/k}}_{=0} = \int_V u_i .$$

La quantità di moto dell'aria all'interno della scatola può essere scritta come

$$\mathbf{Q}_a = \int_{V_a(t)} \rho_a \mathbf{u} = \rho_a \int_{V_a(t)} \mathbf{u} = m_a \mathbf{u}_a(t) = m_a \frac{d\mathbf{r}_a}{dt} .$$

Centro geometrico - differenza di volumi

Usano la proprietà di additività delle proprietà geometriche, si può ricavare il legame tra i centri geometrici dei componenti del sistema. In particolare, per comodità si prende come riferimento il centro della gabbia, e si trova legame tra il centro geometrico del volume occupato dall'aria (che coincide con il centro di massa, nell'ipotesi di densità costante), e il centro geometrico del volume occupato dal volatile.

$$\mathbf{0} = \int_{V_a \cup V_b} \mathbf{r} = \int_{V_a} \mathbf{r} + \int_{V_b} \mathbf{r} = V_a \mathbf{r}_a^g + V_b \mathbf{r}_b^g,$$

e quindi

$$\mathbf{r}_a = -\frac{V_b}{V_a} \mathbf{r}_b.$$

Nel caso in cui l'uccello abbia densità uniforme, il centro geometrico coincide con il centro di massa, $\mathbf{r}_b^g = \mathbf{r}_b$.

Tara e risultante delle forze di pressione

...

Bernoulli theorems and vorticity dynamics

Per fluidi incomprimibili o barotropici (per i quali la pressione è funzione solo della densità), il teorema di Bernoulli si ottiene dal bilancio della quantità di moto. Si elencano qui tre forme del teorema di Bernoulli, ognuna caratterizzata da diverse ipotesi. Tramite l'identità vettoriale

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}),$$

applicata al termine convettivo $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, è possibile ottenere la forma del Crocco dell'equazione della quantità di moto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla P &= \mathbf{g} \\ \left((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} \right) \\ \rightarrow \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla P &= \mathbf{g}, \end{aligned}$$

avendo indicato con P il potenziale termodinamico, $P =$ che si riduce al rapporto p/ρ nel caso di densità costante e con \mathbf{g} le forze per unità di massa.

5.1 Prima forma del teorema di Bernoulli

Nel caso di fluido non viscoso, incomprimibile o barotropico, in regime stazionario ($\partial/\partial t \equiv 0$), con forze di massa conservative $\mathbf{g} = -\nabla\chi$, il trinomio di Bernoulli $|\mathbf{u}|^2/2 + P + \chi$ è costante lungo le linee di corrente e le linee vorticosi, cioè

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P + \chi \right) = 0,$$

con $\hat{\mathbf{t}}$ versore tangente alle linee di corrente o alle linee vorticosi. Infatti, il termine $\boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{u}$ nell'equazione della quantità di moto nella forma di Crocco ([eqn:bilanci:crocco]{reference-type=>ref} reference=>eqn:bilanci:crocco}) è perpendicolare in ogni punto del dominio alle linee di corrente ($\hat{\mathbf{t}}$ parallelo al campo di velocità \mathbf{u}) e alle linee vorticosi ($\hat{\mathbf{t}}$ parallelo al campo di vorticità $\boldsymbol{\zeta}$): moltiplicando scalarmente l'equazione ([eqn:bilanci:crocco]{reference-type=>ref} reference=>eqn:bilanci:crocco}) scritta per un fluido non viscoso ($\nu = 0$) per il versore $\hat{\mathbf{t}}$, il prodotto scalare $\hat{\mathbf{t}} \cdot (\boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{u})$ è identicamente nullo.

5.2 Seconda forma del teorema di Bernoulli

Nella corrente irrotazionale ($\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$) di un fluido non viscoso, incomprimibile o barotropico, in regime stazionario, con forze di massa conservative $\mathbf{g} = -\nabla\chi$, il trinomio di Bernoulli $|\mathbf{u}|^2/2 + P + \chi$ è costante in tutto il dominio, cioè

$$\nabla \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P + \chi \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + P + \chi = C.$$

5.3 Terza forma del teorema di Bernoulli

Nella corrente irrotazionale ($\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$) di un fluido non viscoso, incomprimibile o barotropico, in un dominio semplicemente connesso (nel quale è quindi possibile definire il potenziale cinetico ϕ , t.c. $\mathbf{u} = \nabla\phi$, con forze di massa conservative $\mathbf{g} = -\nabla\chi$, il quadriminomio di Bernoulli $\partial\phi/\partial t + |\mathbf{u}|^2/2 + P + \chi$ è uniforme (costante in spazio, in generale **non** in tempo) in tutto il dominio, cioè

$$\left(\nabla \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + P + \chi \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + P + \chi = C(t).$$

5.4 Teoremi di Bernoulli per fluidi viscosi incomprimibili

Mentre la prima forma del teorema di Bernoulli non è valida se non viene fatta l'ipotesi di fluido non viscoso¹, la seconda e la terza forma sono ancora valide per fluidi viscosi incomprimibili. Infatti, usando l'identità vettoriale

$$\Delta\mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}),$$

si scopre che il laplaciano del campo di velocità per correnti irrotazionali ($\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$) di fluidi incomprimibili ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) è nullo.

L'ipotesi di fluido non viscoso non è direttamente necessaria per la seconda e la terza forma del teorema di Bernoulli, ma lo diventa tramite l'ipotesi di corrente irrotazionale. Sotto opportune ipotesi sulla corrente asintotica, verificate in molti casi di interesse aeronautico, si dimostra che (quasi) tutto il campo di moto è irrotazionale solo se viene fatta l'ipotesi di fluido non viscoso. Questo modello viene utilizzato per studiare correnti di interesse aeronautico, nelle quali gli effetti della viscosità sono (quasi ovunque) trascurabili: un esempio è la corrente, uniforme a monte, che investe un corpo aerodinamico a bassi angoli di incidenza (corpo affusolato, attorno al quale non si verificano separazioni) per alti numeri di Reynolds: in queste correnti, le zone vorticosi sono confinate in regioni di spessore sottile (strato limite sulla superficie dei corpi solidi e scie libere).

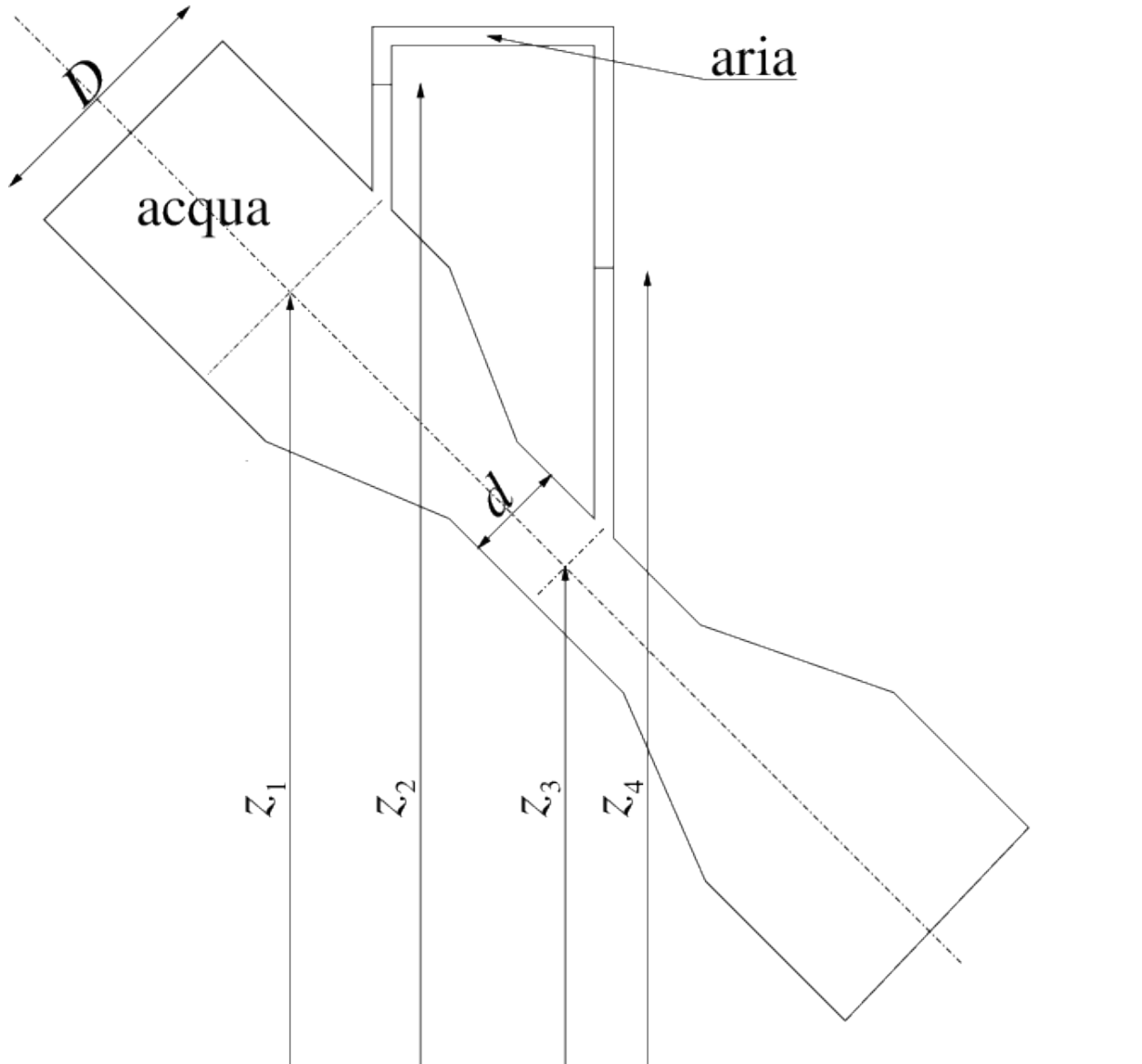
¹ Moltiplicando scalarmente l'equazione ([eqn:bilanci:crocco]{reference-type=>ref> reference=>eqn:bilanci:crocco}) per il versore $\hat{\mathbf{t}}$, il termine $\hat{\mathbf{t}} \cdot \nu \Delta\mathbf{u}$ non si annulla. Rimane quindi

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P + \chi \right) - \nu \hat{\mathbf{t}} \cdot \Delta\mathbf{u} = 0$$

5.5 Exercises

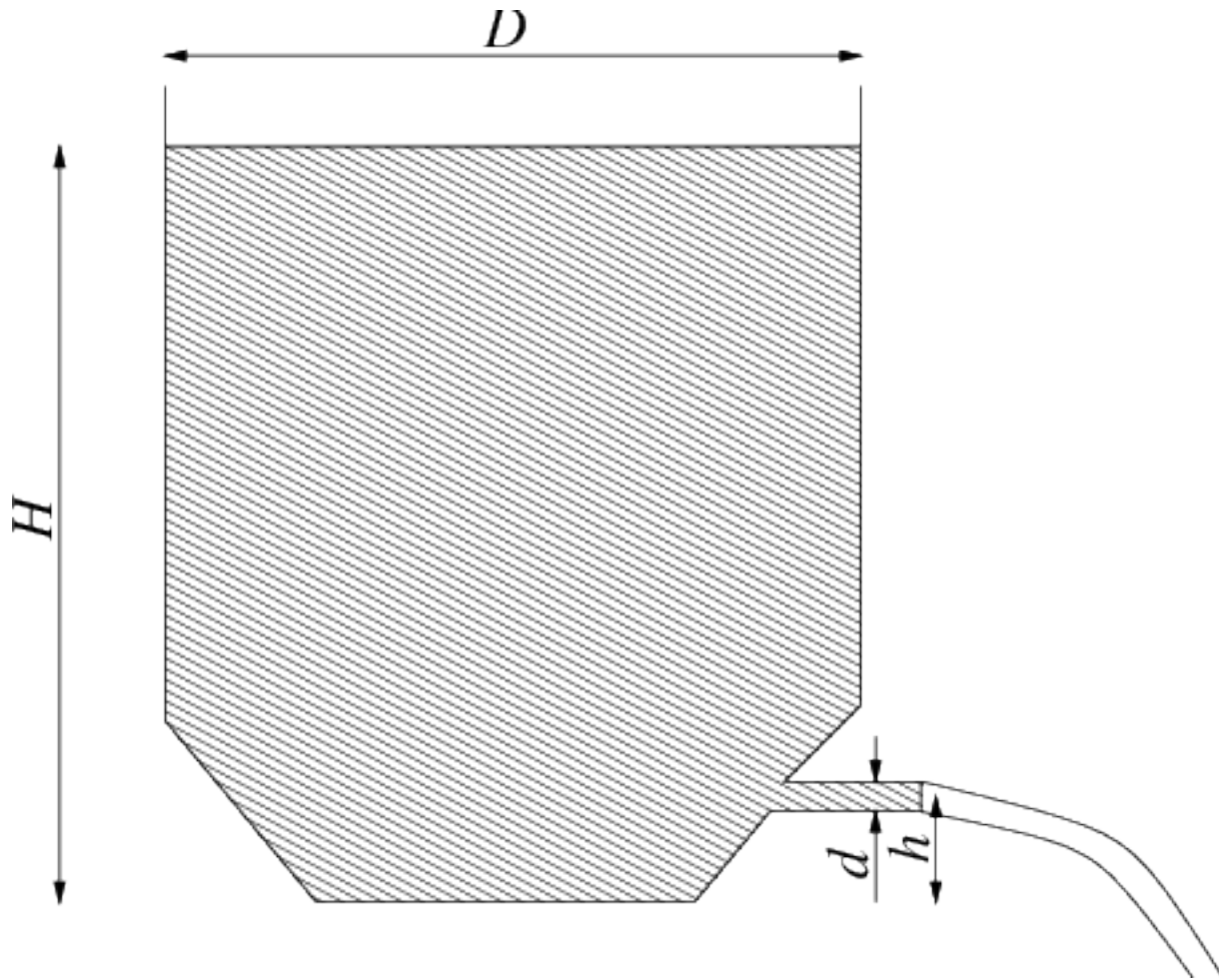
Exercise 5.1 Determinare la portata d'acqua che scorre all'interno del tubo di Venturi rappresentato in figura, quando sia trascurabile ogni effetto dissipativo all'interno della corrente e la velocità uniforme nelle sezioni considerate e a monte del Venturi. Dati: densità dell'acqua $\bar{\rho} = 999 \text{ kg/m}^3$, densità dell'aria $\bar{\rho} = 1.225 \text{ kg/m}^3$, diametro del tubo $D = 2 \text{ cm}$, diametro della sezione di gola $d = 1 \text{ cm}$, altezze: $z_1 = 10 \text{ cm}$, $z_2 = 1.2 \text{ m}$, $z_3 = 5 \text{ cm}$, $z_4 = 0.5 \text{ m}$.

($Q = 3.01 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$, $\bar{Q} = 3.005 \cdot 10^{-1} \text{ kg/s}$)



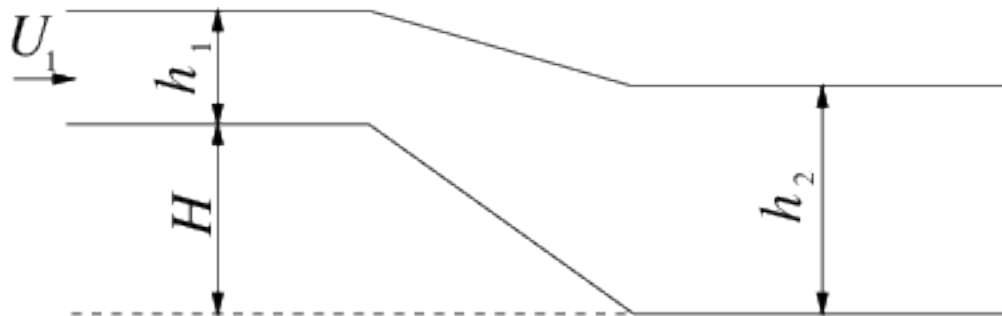
Exercise 5.2 Si consideri il serbatoio rappresentato in figura, $D = 2 \text{ m}$, $H = 4.4 \text{ m}$ al cui interno è contenuta acqua, $\bar{\rho} = 999 \text{ kg/m}^3$. Supponendo il fluido non viscoso, determinare la velocità U di efflusso del fluido dall'ugello del serbatoio, $h = 0.4 \text{ m}$ e $d = 1 \text{ cm}$, e la sua portata, sia in massa sia in volume.

($U = 8.86 \text{ m/s}$, $Q = 6.96 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$, $\bar{Q} = 0.695 \text{ kg/s}$)



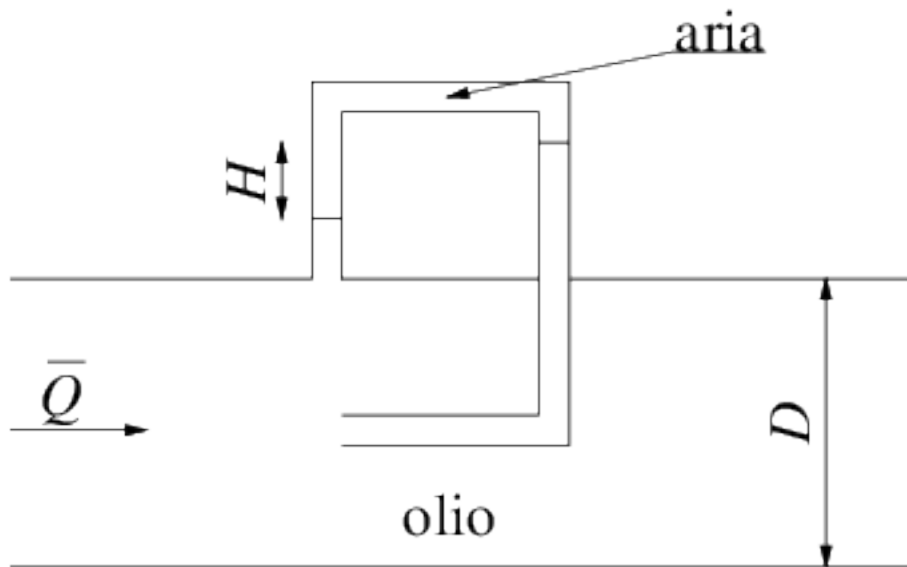
Exercise 5.3 Si consideri il flusso d'acqua, $\bar{\rho} = 999 \text{ kg/m}^3$, nel canale rappresentato in figura. Nel primo tratto l'acqua scorre con una velocità uniforme $U_1 = 1 \text{ m/s}$ e l'altezza del pelo libero rispetto al fondo del canale è $h_1 = 1.5 \text{ m}$. Determinare la velocità dell'acqua U_2 e l'altezza del pelo libero h_2 nel secondo tratto del canale, sapendo che l'altezza del fondo del primo tratto rispetto al fondo del secondo tratto è $H = 0.5 \text{ m}$. Si trascuri qualunque effetto dissipativo.

(Soluzione 1: $U_2 = 0.741 \text{ m/s}$, $h_2 = 2.022 \text{ m}$. Soluzione 2: $U_2 = 5.940 \text{ m/s}$, $h_2 = 0.252 \text{ m}$)



Exercise 5.4 Dato il condotto a sezione circolare rappresentato in figura, determinare la portata in massa d'olio, $\bar{\rho} = 850 \text{ kg/m}^3$, attraverso il condotto stesso sapendo che il diametro del condotto è $d = 0.5 \text{ m}$, che la differenza di altezza fra i peli liberi è $H = 40 \text{ cm}$, che il diametro del tubo «a U» è di 2 mm . Si trascuri qualunque effetto dissipativo, si assuma uniforme la velocità in una sezione sufficientemente lontana a monte e si consideri che nel tubo «a U» sia presente aria in condizioni normali.

($\bar{Q} = 467.2 \text{ kg/s}$)



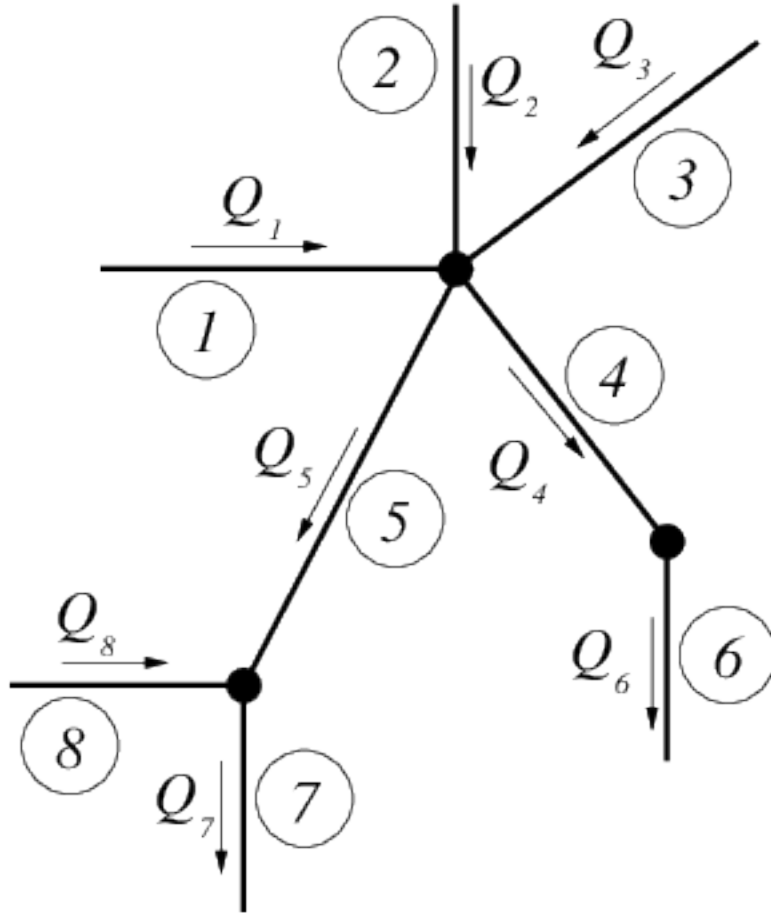
Exercise 5.5 Si consideri un getto stazionario, assialsimmetrico, d'acqua in condizioni standard, diretto verso l'alto, in atmosfera uniforme, secondo la verticale z , e uscente con velocità uniforme e costante $V = 20 \text{ m/s}$ da un ugello circolare di diametro $d = 5 \text{ cm}$. Si assuma che:

- la curvatura delle linee di flusso sia trascurabile;
- sia trascurabile ogni perdita di energia.

Si determinino:

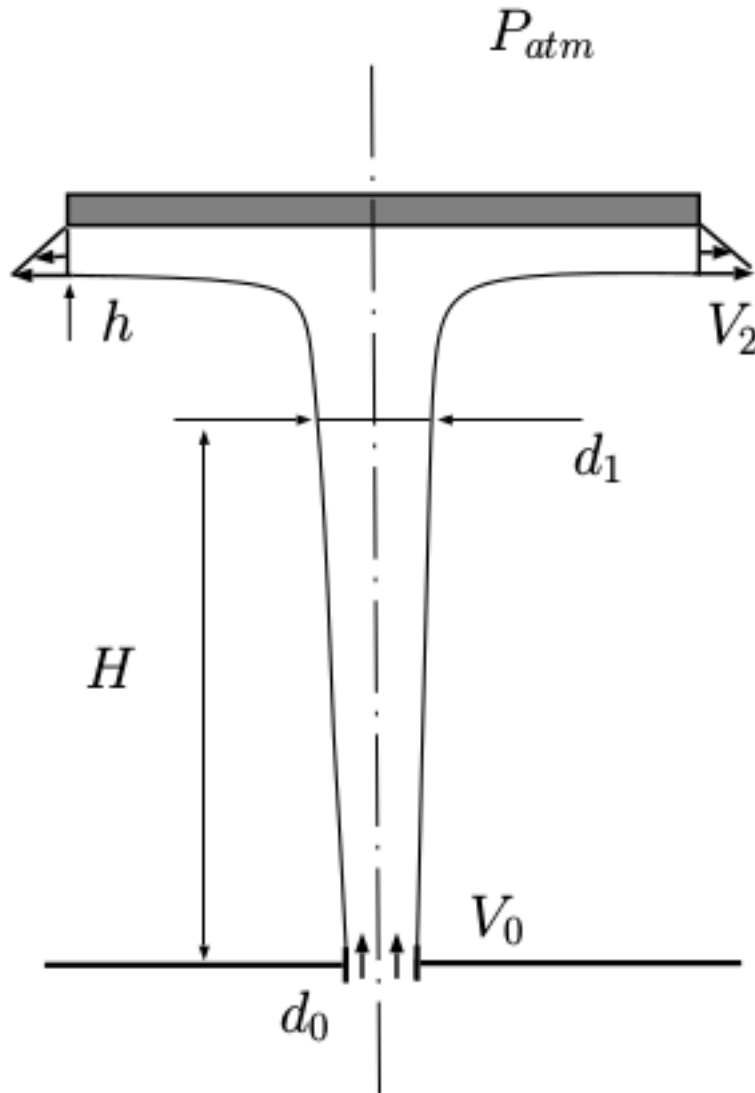
1. il diametro D del getto alla quota $Z = 15 \text{ m}$ (misurata dal piano d'uscita dall'ugello);
2. la massima quota ideale H cui può giungere il getto.

($D = 6.97 \text{ cm}$, $H = 20.39 \text{ m}$)



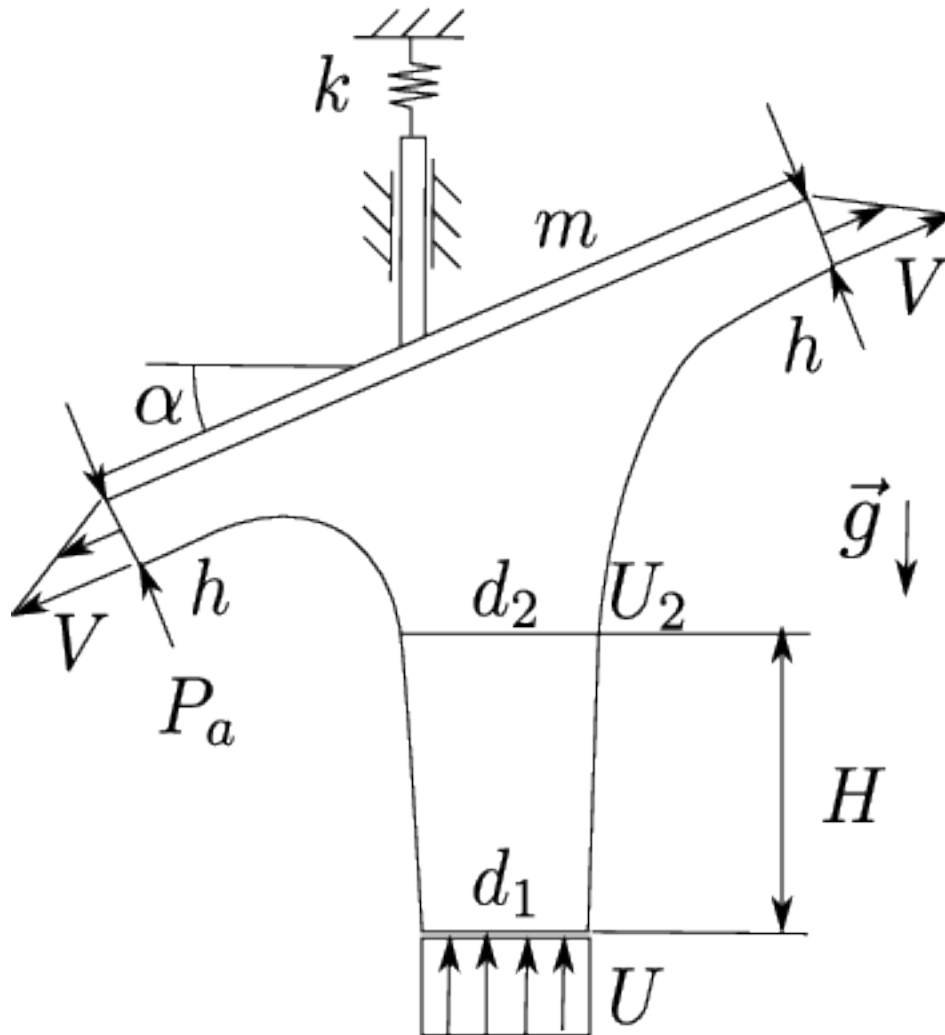
Exercise 5.6 In un gioco d'acqua ($\rho = 999 \text{ kg/m}^3$), un disco di diametro $D = 35 \text{ cm}$ viene sollevato da un getto che fuoriesce con velocità $V_0 = 10 \text{ m/s}$ da un foro di diametro $d_0 = 8 \text{ cm}$ concentrico all'asse del disco, così come illustrato schematicamente in figura. Noto che in condizioni stazionarie la quota raggiunta dal disco è di poco superiore alla quota $H = 2 \text{ m}$, si richiede di determinare:

1. la velocità V_1 e il diametro d_1 del getto alla quota H supponendo trascurabili tra le sezioni 0 e 1 sia la curvatura delle linee di flusso che ogni forma di dissipazione;
2. lo spessore h del film d'acqua all'estremità del disco assumendo che il profilo di velocità radiale sia lineare con velocità massima $V_2 = V_1$.
3. la massa m del disco considerando trascurabili sia gli sforzi viscosi all'interfaccia tra l'atmosfera circostante ($P_{atm} = 101325 \text{ Pa}$) e il getto d'acqua che la forza gravitazionale agente sul fluido tra la quota H e la quota del disco.



Exercise 5.7 Un getto di acqua ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$) colpisce una lamina di massa per unità di apertura $m = 1 \text{ kg/m}$ inclinata di un angolo $\alpha = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale, connessa a terra con una molla di costante elastica $k = 10^5 \text{ N/m}^2$. Il getto esce con profilo uniforme $U = 10 \text{ m/s}$ da una fessura larga $d_1 = 5 \text{ cm}$. Determinare:

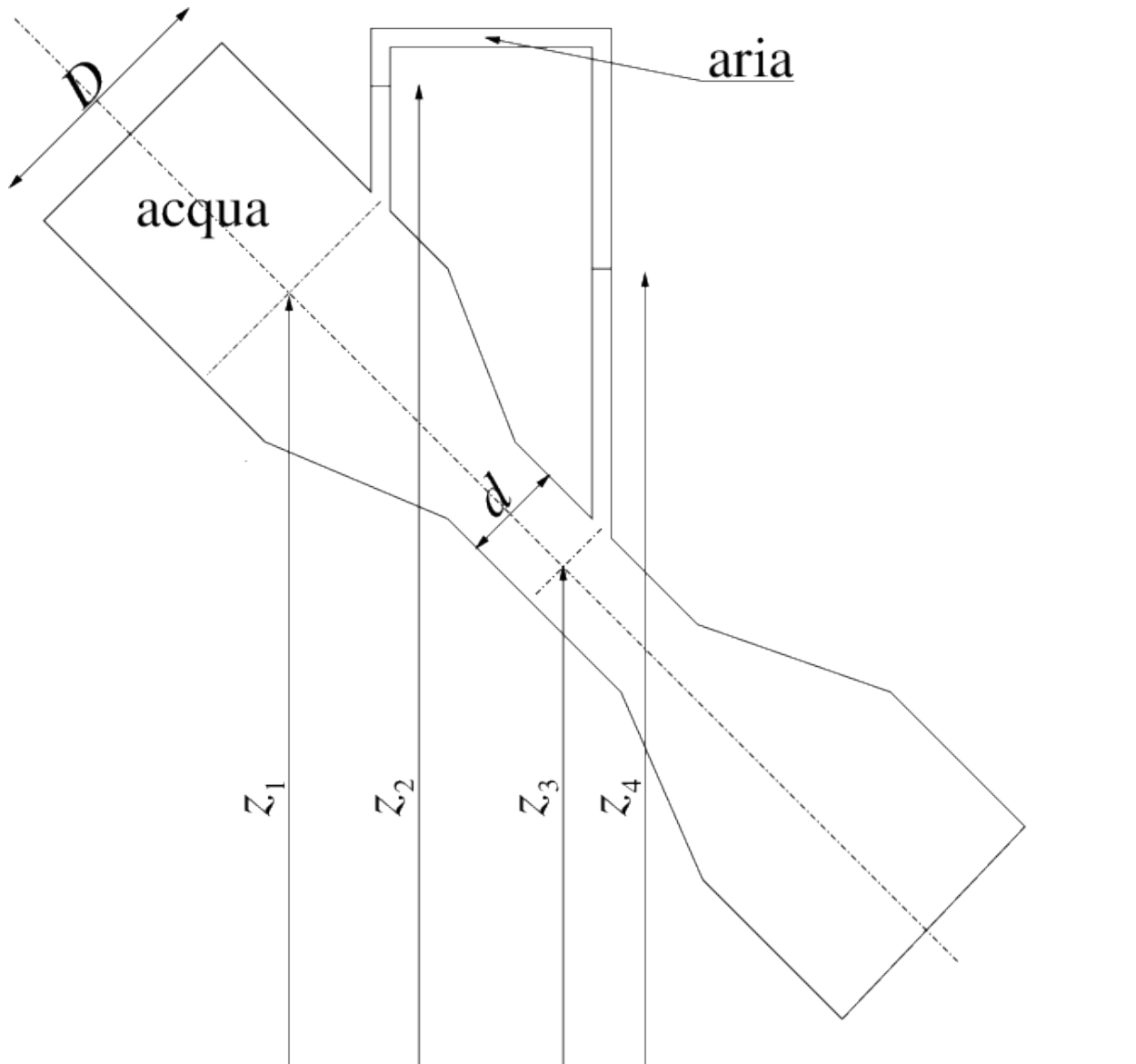
- la velocità U_2 (uniforme) e lo spessore d_2 del getto alla quota $H = 1 \text{ m}$ sopra la fessura di uscita, supponendo trascurabili ogni forma di dissipazione e la curvatura delle linee di corrente;
- la velocità massima V del profilo triangolare di spessore $h = 2 \text{ cm}$, identico su entrambe le estremità della lamina;
- la deformazione della molla, considerando trascurabili gli sforzi viscosi all'interfaccia tra il getto e l'atmosfera circostante ($P_a = 101325 \text{ Pa}$) e la gravità agente sul fluido al di sopra della quota H .



5.5.1 Exercise 5.1

Exercise 5.1 Determinare la portata d'acqua che scorre all'interno del tubo di Venturi rappresentato in figura, quando sia trascurabile ogni effetto dissipativo all'interno della corrente e la velocità uniforme nelle sezioni considerate e a monte del Venturi. Dati: densità dell'acqua $\bar{\rho} = 999 \text{ kg/m}^3$, densità dell'aria $\bar{\rho} = 1.225 \text{ kg/m}^3$, diametro del tubo $D = 2 \text{ cm}$, diametro della sezione di gola $d = 1 \text{ cm}$, altezze: $z_1 = 10 \text{ cm}$, $z_2 = 1.2 \text{ m}$, $z_3 = 5 \text{ cm}$, $z_4 = 0.5 \text{ m}$.

($Q = 3.01 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$, $\bar{Q} = 3.005 \cdot 10^{-1} \text{ kg/s}$)



Cocnetti. Teorema di Bernoulli. Equazione della vorticità. Conseguenze delle ipotesi di stazionarietà, fluido incomprimibile, non viscoso, irrotazionale. Dominio di applicabilità del teorema di Bernoulli. Condizioni all'interfaccia. Legge di Stevino.

Svolgimento. Il problema viene risolto in diversi passi successivi: in principio vengono fatte alcune ipotesi semplificative ($\rho = \bar{\rho}$, $\mu = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$); poi si utilizza l'equazione della vorticità per semplificare ulteriormente il problema; si determina il dominio in cui è applicabile il teorema di Bernoulli con le ipotesi fatte; si osserva che la parte restante del problema è un problema di statica; si determinano le condizioni di interfaccia tra i due domini; solo a questo punto è possibile scrivere il sistema di equazioni dal quale ricavare le quantità richieste dal problema.

- Il testo del problema consente di fare le seguenti ipotesi: fluido incomprimibile, non viscoso, stazionario.
- L'ipotesi di flusso non viscoso e quella di velocità uniforme a monte permettono di definire il dominio all'interno del quale è possibile applicare il teorema di Bernoulli, aggiungendo l'ipotesi di irrotazionalità alle tre ipotesi precedenti. Infatti, l'equazione della vorticità può essere scritta come:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}$$

La derivata materiale rappresenta la variazione di una quantità associata a una particella materiale che segue il moto del fluido. Poiché la vorticità nella sezione a monte è nulla (il profilo di velocità è uniforme quindi le derivate spaziali sono nulle), la vorticità rimane nulla ($\frac{df}{dt} = af$, se $f = 0$ all'istante iniziale la sua derivata in quell'istante è nulla, quindi f non varia, quindi rimane uguale a zero).

- Il dominio in cui è possibile applicare il teorema di Bernoulli con le ipotesi di incomprimibilità, assenza di viscosità ed effetti dissipativi, stazionarietà, **irrotazionalità** e connessione semplice del dominio, coincide con il tubo di Venturi stesso. Infatti in corrispondenza delle prese a parete cade l'ipotesi di irrotazionalità.

Secondo le ipotesi fatte il fluido è non viscoso. Questo assicura che la vorticità sia nulla lungo le linee di corrente. Nel tubo del manometro però il fluido è fermo. Per un fluido non viscoso in corrispondenza dell'interfaccia non ci deve essere discontinuità nella componente normale all'interfaccia stessa e nella pressione. La componente normale è nulla da entrambe le parti della discontinuità; la componente tangenziale è però discontinua: mentre nel tubo di Venturi è diversa da zero, nel tubo del manometro è nulla. Questo comporta che la vorticità non sia nulla (bensì infinita: «differenza finita in uno spessore infinitesimo») e di conseguenza la non validità in questa regione delle ipotesi fatte in precedenza.

Si possono quindi distinguere due regioni (il tubo di Venturi e il manometro) che non possono «parlare» tra di loro con il teorema di Bernoulli, ma solo tramite la condizione di **interfaccia** (continuità degli sforzi: per fluidi non viscosi questa condizione coincide con la continuità della pressione).

- É possibile ora scrivere il sistema risolvante:

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_A + \frac{1}{2}U_A^2 + \rho gz_A = P_{B_1} + \frac{1}{2}U_{B_1}^2 + \rho gz_{B_1} & \text{(Bernoulli A-}B_1\text{)} \\ P_{B_1} = P_{B_2} & \text{(interfaccia } B_1\text{-}B_2\text{)} \\ P_{B_2} + \rho gz_{B_2} = P_C + \rho gz_C & \text{(Stevino } B_2\text{-}C\text{)} \\ P_C + \rho_a gz_C = P_D + \rho_a gz_D & \text{(Stevino C-}D\text{)} \\ P_D + \rho gz_D = P_{E_2} + \rho gz_{E_2} & \text{(Stevino D-}E_2\text{)} \\ P_{E_2} = P_{E_1} & \text{(interfaccia } E_2\text{-}E_1\text{)} \\ P_{E_1} + \frac{1}{2}\rho U_{E_1}^2 + \rho gz_{E_1} = P_F + \frac{1}{2}\rho U_F^2 + \rho gz_F & \text{(Bernoulli } E_1\text{-}F\text{)} \\ P_A + \frac{1}{2}\rho U_A^2 + \rho gz_A = P_F + \frac{1}{2}\rho U_F^2 + \rho gz_F & \text{(Bernoulli A-}F\text{)} \\ \rho \frac{\pi D^2}{4} U_A = \rho \frac{\pi d^2}{4} U_F & \text{(continuità A-}F\text{)} \end{array} \right.$$

che, osservando che $z_{B_1} = z_{B_2} = z_B$, $z_{E_1} = z_{E_2} = z_E$ e applicando le ipotesi fatte in precedenza ($U_A = u_{B_1}$, $U_F = u_{E_1}$, $P_{B_1} = P_{B_2} = P_B$, $P_{E_1} = P_{E_2} = P_E$), diventa:

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_A + \rho gz_A = P_B + \rho gz_B & \text{(Bernoulli A-}B\text{)} \\ P_{B_2} + \rho gz_{B_2} = P_C + \rho gz_C & \text{(Stevino B-}C\text{)} \\ P_C + \rho_a gz_C = P_D + \rho_a gz_D & \text{(Stevino C-}D\text{)} \\ P_D + \rho gz_D = P_E + \rho gz_E & \text{(Stevino D-}E\text{)} \\ P_{E_1} + \rho gz_{E_1} = P_F + \rho gz_F & \text{(Bernoulli E-}F\text{)} \\ P_A + \frac{1}{2}\rho U_A^2 + \rho gz_A = P_F + \frac{1}{2}\rho U_F^2 + \rho gz_F & \text{(Bernoulli A-}F\text{)} \\ D^2 U_A = d^2 U_F & \text{(continuità A-}F\text{)} \end{array} \right.$$

Anche se il numero di equazioni è minori del numero di incognite, prova che il sistema è indeterminato, si dimostra che U_A e U_F sono determinate (nelle equazioni intervengono sempre differenze di pressioni, ed è questo il motivo dell'indeterminazione).

- Soluzione del sistema: il sistema può essere risolto come più si preferisce. Per esempio, partendo da quella che può essere una «lettura dello strumento» $\Delta z = z_C - z_D$ e «chiudendo il ciclo ABCDEF»:

$$\rho_a g \Delta z = P_D - P_C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_D = P_E + \rho g(h_E - h_D) = P_F + \rho g(h_F - h_D) \\ P_C = P_B + \rho g(h_B - h_C) = P_A + \rho g(h_A - h_C) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow P_D - P_C &= (P_F + \rho g h_F) - (P_A + \rho g h_A) + \rho g \Delta z = \quad (\text{Bernoulli A-F}) \\
 &= \frac{1}{2} \rho U_A^2 - \frac{1}{2} \rho U_F^2 + \rho g \Delta z = \quad (\text{continuità}) \\
 &= -\frac{1}{2} \rho U_A^2 \left(\frac{D^4}{d^4} - 1 \right) + \rho g \Delta z
 \end{aligned}$$

E quindi:

$$\begin{aligned}
 (\rho - \rho_a) g \Delta z &= \frac{1}{2} \rho U_A^2 \left(\frac{D^4}{d^4} - 1 \right) \\
 U_A &= \sqrt{\frac{2(1 - \rho_a/\rho) g \Delta z}{\frac{D^4}{d^4} - 1}}
 \end{aligned}$$

Inserendo i valori numerici, si trova: $U = 0.956 \text{ m/s}$, $Q = 3.0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$, $\bar{Q} = 3.0 \cdot 10^{-1} \text{ kg/s}$.

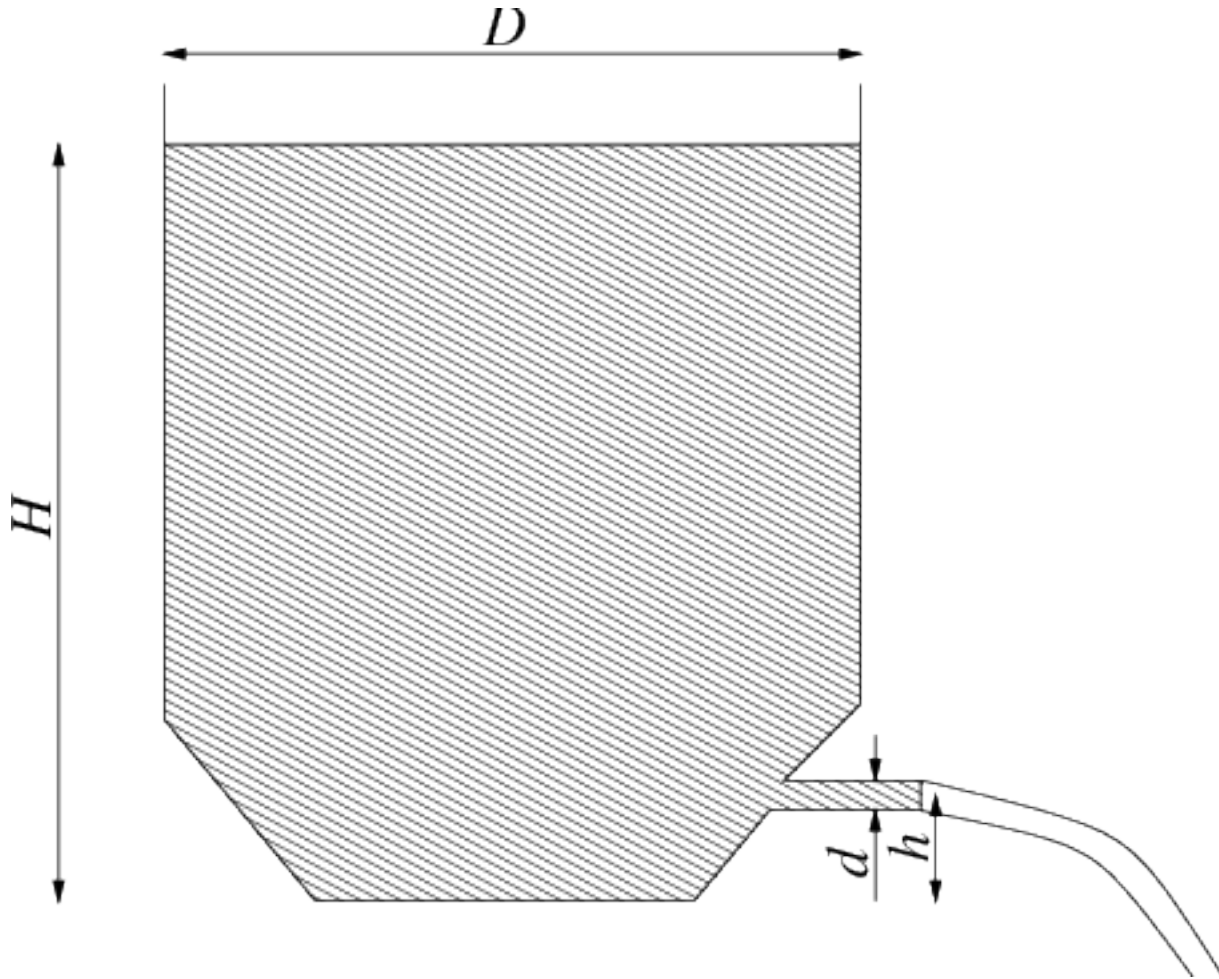
Osservazioni. È importante saper riconoscere i limiti di applicabilità di formule e teoremi nel rispetto delle ipotesi con le quali essi vengono formulati.

Considerazioni analoghe dovranno essere svolte anche in esercizi simili a questo, riguardanti le soluzioni esatte delle equazioni di Navier-Stokes.

5.5.2 Exercise 5.2

Exercise 5.2 Si consideri il serbatoio rappresentato in figura, $D = 2 \text{ m}$, $H = 4.4 \text{ m}$ al cui interno è contenuta acqua, $\bar{\rho} = 999 \text{ kg/m}^3$. Supponendo il fluido non viscoso, determinare la velocità $\{a\}$ di efflusso del fluido dall'ugello del serbatoio, $h = 0.4 \text{ m}$ e $d = 1 \text{ cm}$, e la sua portata, sia in massa sia in volume.

($U = 8.86 \text{ m/s}$, $Q = 6.96 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$, $\bar{Q} = 0.695 \text{ kg/s}$)



Teorema di Bernoulli, nel caso incomprimibile, non viscoso, «stazionario» (da come è fatto il disegno, il livello del serbatoio sembra diminuire...assumiamo che così non sia), con forze che ammettono potenziale e dominio semplicemente connesso. Se si fa l'ipotesi che il flusso sia irrotazionale sulla sezione di ingresso, nel caso non viscoso, si mantiene irrotazionale ovunque (equazione della vorticità).

$$\frac{D\boldsymbol{\zeta}}{Dt} = (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla)\mathbf{u}$$

Si può quindi scrivere il teorema di Bernoulli nella forma:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + gh = \text{cost}$$

Il problema si risolve mettendo a sistema il teorema di Bernoulli (opportunamente semplificato; vedi sopra) con il bilancio integrale di massa. Si ipotizza che sulle due sezioni agisca la stessa pressione esterna.

$$\begin{cases} A_1 u_1 = A_2 u_2 & (\text{massa}) \\ \frac{u_1^2}{2} + gh_1 = \frac{u_2^2}{2} + gh_2 & (\text{Bernoulli}) \end{cases}$$

Svolgendo i passaggi, ricordando che le superfici sono circolari, risulta:

$$u_2 = \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}}$$

Si calcolano poi le portate volumetriche e di massa.

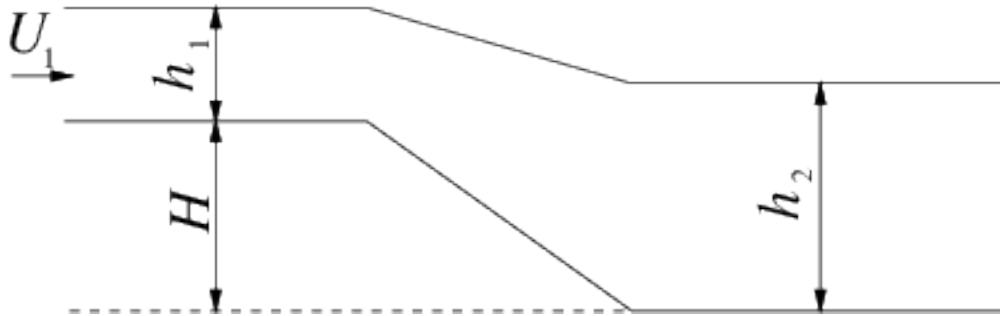
$$Q = A_2 u_2$$

$$\dot{m} = \rho Q$$

5.5.3 Exercise 5.3

Exercise 5.3 Si consideri il flusso d'acqua, $\bar{\rho} = 999 \text{ kg/m}^3$, nel canale rappresentato in figura. Nel primo tratto l'acqua scorre con una velocità uniforme $U_1 = 1 \text{ m/s}$ e l'altezza del pelo libero rispetto al fondo del canale è $h_1 = 1.5 \text{ m}$. Determinare la velocità dell'acqua U_2 e l'altezza del pelo libero h_2 nel secondo tratto del canale, sapendo che l'altezza del fondo del primo tratto rispetto al fondo del secondo tratto è $H = 0.5 \text{ m}$. Si trascuri qualunque effetto dissipativo.

(Soluzione 1: $U_2 = 0.741 \text{ m/s}$, $h_2 = 2.022 \text{ m}$. Soluzione 2: $U_2 = 5.940 \text{ m/s}$, $h_2 = 0.252 \text{ m}$)



Teorema di Bernoulli nel caso incomprimibile, non viscoso, stazionario, irrotazionale. Soluzione di equazioni di terzo grado: metodo grafico e numerico. Correnti in canali aperti: soluzioni «fisiche», numero di Froude Fr , correnti subcritiche e supercritiche.

L'esercizio viene risolto in due passi, che richiedono diversi livelli di conoscenza della dinamica dei fluidi in canali aperti: in un primo tempo, vengono ricavate le soluzioni ammissibili ($h_2 > 0$, $U_2 > 0$) del problema; in un secondo tempo, viene scelta la soluzione fisica del problema, tra le due soluzioni ammissibili trovate in precedenza.

Parte 1.

L'esercizio viene risolto mettendo a sistema il teorema di Bernoulli riferito a una linea di corrente sul pelo libero (sul quale agisce la pressione ambiente P_a , costante) e l'equazione di continuità. Grazie alle ipotesi elencate in precedenza, si può scrivere il sistema risolvibile come:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho U_1^2 + \rho g(h_1 + H) = \frac{1}{2}\rho U_2^2 + \rho g h_2 \\ h_1 U_1 = h_2 U_2 \end{cases}$$

Il sistema è di due equazioni (non lineari) nelle incognite U_2 e h_2 . Se si ricava una delle due incognite da un'equazione e la si inserisce nell'altra, si ottiene un'equazione di terzo grado. Per esempio, ricavando h_2 dalla prima e inserendola nella seconda, per l'incognita U_2 si ottiene l'equazione di terzo grado:

$$h_1 U_1 = U_2 \left(\frac{U_1^2 - U_2^2}{2g} + (h_1 + H) \right)$$

I metodi numerici convergono (quando convergono) a una soluzione, senza informazioni su quante soluzioni esistono effettivamente: prima di risolvere l'equazione di terzo grado con un metodo numerico è utile un primo approccio analitico al problema.

Per questo cerchiamo le soluzioni del sistema di due equazioni per via grafica. Le equazioni del sistema [eqn:bern_cont]{reference-type=>ref} reference=>eqn:bern_cont} definiscono curve nel piano (U_2, h_2) . Se scegliamo

di usare come asse orizzontale quello delle U_2 , la prima equazione definisce una parabola con la concavità diretta verso il basso ($h_2 = -0.5U_2^2/g + \dots$), mentre la seconda un'iperbole.

Esistono due soluzioni con senso fisico ($h_2 \geq 0, U_2 \geq 0$). Ora che sappiamo quante soluzioni cercare e dove cercarle, possiamo procedere con un metodo numerico, dando guess iniziali in un intorno della soluzione. Le due soluzioni sono:

$$A : \begin{cases} U_2 = 0.741 \text{ m/s} \\ h_2 = 2.022 \text{ m} \end{cases} \quad B : \begin{cases} U_2 = 5.940 \text{ m/s} \\ h_2 = 0.252 \text{ m} \end{cases}$$

Parte 2.

É plausibile farsi una domanda: al netto delle ipotesi fatte sul regime di moto (fluido incomprimibile, non viscoso), il modello è in grado di descrivere il fenomeno fisico e stabilire quale delle due soluzioni ammissibili trovate è la soluzione «fisica»? Seguendo la trattazione del problema svolta in [Chaudhry, *Open-Channel Flow*, paragrafo 2-7: Channel transition e paragrafi vicini](#), è possibile trovare l'unica soluzione fisica del problema. Viene introdotta la notazione usata da Chaudhry, che contrasta in parte con quella usata finora. Si tornerà alla notazione usata nella prima parte dell'esercizio, solo alla fine per scrivere i risultati.

La variabile $z(x)$ descrive la quota del fondo del canale, la variabile $y(x)$ descrive la profondità della corrente, riferita al fondo del canale. Si indica con $Q = Vy$ la portata in volume, costante. Il trinomio di Bernoulli H , diviso per ρ e g , è costante lungo il canale. Si ricorda che sulla linea di corrente in corrispondenza del pelo libero agisce una pressione costante uguale alla pressione ambiente P_a . Se si introduce la coordinata orizzontale x ,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dH}{dx} = \frac{d(y+z)}{dx} + \frac{d}{dx} \frac{V^2}{2g} = \\ &= \frac{d(y+z)}{dx} + \frac{d}{dx} \frac{Q^2}{2gy^2} = \\ &= \frac{d(y+z)}{dx} - \frac{Q^2}{gy^3} \frac{dy}{dx} = \\ &= \frac{d(y+z)}{dx} - \frac{V^2}{gy} \frac{dy}{dx} = \\ &= \frac{d(y+z)}{dx} - Fr^2 \frac{dy}{dx} = \\ &= \frac{dz}{dx} - (Fr^2 - 1) \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

dove è stato introdotto il numero di Froude $Fr = V(y)^2/gy$, e qui è stata esplicitata la dipendenza dalla profondità y , funzione a sua volta funzione della coordinata x . Si trova così il legame tra la profondità della corrente $y(x)$, la quota del fondo $z(x)$ e lo stato della corrente, descritto dal numero di Froude.

$$\frac{dz}{dx} = (Fr^2(y(x)) - 1) \frac{dy}{dx}$$

Vengono definiti due regimi di moto: subcritico $Fr < 1$, supercritico $Fr > 1$. Il profilo del fondo $z(x)$, e quindi la sua derivata, è noto dal progetto del canale. La profondità della corrente $y(x)$ può essere ottenuta integrando l'eq. [\[eqn:flow_depth\]{reference-type=>ref reference=>eqn:flow_depth}](#) con le condizioni iniziali note sulla sezione di ingresso.

Per risolvere il nostro esercizio è sufficiente ragionare sui segni dei tre termini dell'eq. [\[eqn:flow_depth\]{reference-type=>ref reference=>eqn:flow_depth}](#): $dz/dx \leq 0$, quindi i due fattori alla destra dell'uguale devono essere discordi. Il numero di Froude sulla sezione di ingresso del problema vale $Fr_1 = U_1^2/(gh_1) = 0.068$, quindi il contenuto della parentesi tonda è negativo (e negativo rimane, al variare di x ; di questo dovete fidarvi...). Deve quindi essere $dy/dx \geq 0$. Tornando alla notazione usata nella prima parte dell'esercizio, dove la profondità della corrente è indicata con $h(x)$,

$dh(x)/dx \geq 0$. Poichè la profondità della corrente aumenta sempre, la soluzione «fisica» tra le due ammissibili è la soluzione A , per la quale $h_2 > h_1$.

$$\begin{cases} U_2 = 0.741 \text{ m/s} \\ h_2 = 2.022 \text{ m} \end{cases}$$

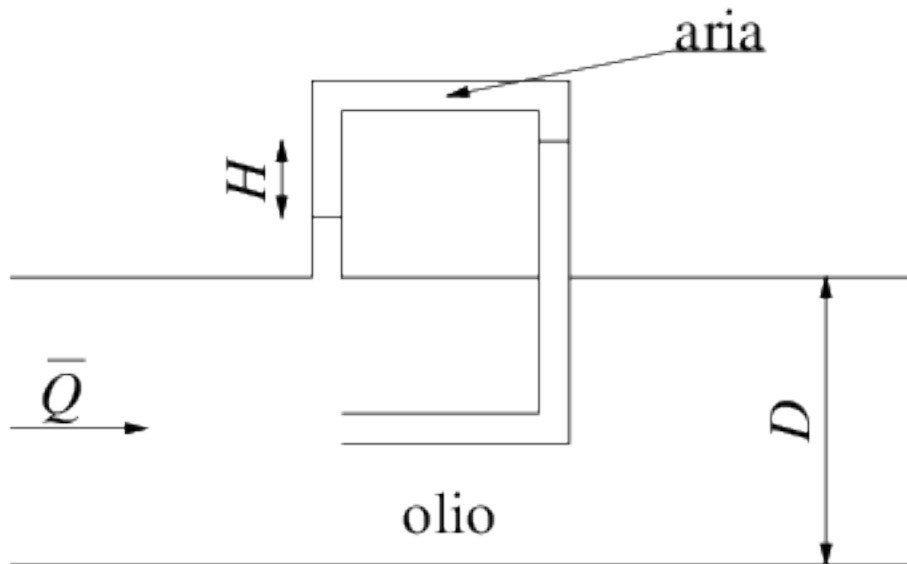
Cosa non è stato detto.

È stato fatto solo un accenno al ragionamento che consente di determinare l'unica soluzione «fisica» del problema delle correnti in canali aperti che variano con continuità. Non si dirà nulla sui salti idraulici (che portano la corrente da uno stato supercritico a uno subcritico), dei quali si possono trovare esempi nei fiumi o sul fondo di un lavandino. Si accenna solo alla uguaglianza formale del problema del moto di un fluido incomprimibile in un canale aperto, con il moto monodimensionale di un fluido comprimibile, dove il ruolo del numero di Froude Fr sarà svolto dal numero di Mach M , la definizione di stato sub- e supercritico, sarà sostituita da quella di condizione sub- e supersonica, il salto idraulico troverà il suo fenomeno corrispondente nelle onde d'urto.

5.5.4 Exercise 5.4

Exercise 5.4 Dato il condotto a sezione circolare rappresentato in figura, determinare la portata in massa d'olio, $\bar{\rho} = 850 \text{ kg/m}^3$, attraverso il condotto stesso sapendo che il diametro del condotto è $d = 0.5 \text{ m}$, che la differenza di altezza fra i peli liberi è $H = 40 \text{ cm}$, che il diametro del tubo «U» è di 2 mm. Si trascuri qualunque effetto dissipativo, si assuma uniforme la velocità in una sezione sufficientemente lontana a monte e si consideri che nel tubo «U» sia presente aria in condizioni normali.

$$(\bar{Q} = 467.2 \text{ kg/s})$$



Teorema di Bernoulli nell'ipotesi di stazionarietà, fluido incomprimibile, non viscoso, irrotazionale. Equazione della vorticità nel caso non viscoso. Legge di Stevino.

Vengono fatte alcune ipotesi semplificative ($\rho = \bar{\rho}$, $\mu = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$); si utilizza poi l'equazione della vorticità per semplificare ulteriormente il problema: se si assume che il profilo di velocità all'ingresso sia uniforme, e quindi a vorticità nulla, il fluido nel canale rimane irrotazionale (dall'equazione della vorticità per fluidi non viscosi).

Gli unici due punti che possono creare problemi sono i collegamenti del tubo con il canale. Sulla linea di corrente che incontra l'imbocco del tubicino, il fluido subisce un rallentamento dalla velocità di ingresso fino ad arrestarsi: su questa

linea di corrente è possibile applicare il teorema di Bernoulli. In corrispondenza dell'altro collegamento, si incontra una superficie di discontinuità a vorticità infinita: non è quindi possibile attraversare questa superficie applicando direttamente il teorema di Bernoulli, ma bisogna ricorrere alle condizioni di interfaccia tra i due domini, quello interno al canale e quello interno al tubo, nel quale possono essere applicate le equazioni della statica.

Vengono definiti i punti A all'ingresso sulla linea di corrente che arriva alla presa del tubo all'interno del canale; il punto B coincidente con la presa del tubo all'interno del canale; C il pelo libero di destra all'interno del tubo «a U», D il pelo libero di sinistra. Si definiscono anche h_C e h_D come quote dei peli liberi (oss. $H = h_C - h_D$).

{ width=»35%» }

Il sistema risolvete è:

$$\begin{cases} P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B \\ P_B + \rho g h_B = P_C + \rho g h_C \\ P_C + \rho_a g h_C = P_D + \rho_a g h_D \\ P_D + \rho g h_D = P_{E_2} + \rho g h_{E_2} \\ P_{E_2} = P_{E_1} \\ P_{E_1} + \frac{1}{2}\rho u_{E_1}^2 + \rho g h_{E_1} = P_F + \frac{1}{2}\rho u_F^2 + \rho g h_F \\ P_F + \frac{1}{2}\rho v_F^2 + \rho g h_F = P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A \\ \bar{Q} = \rho \frac{\pi}{4} d^2 U \end{cases}$$

Osservando che $h_A = h_B$, $h_E = h_F$, $v_A = v_F = U$, $v_B = 0$, supponendo $u_E = U$ (ipotizzando dimensioni e intrusività trascurabile della sonda), il sistema semplificato diventa:

$$\begin{cases} P_A + \frac{1}{2}\rho U^2 = P_B \\ P_B + \rho g h_A = P_C + \rho g h_C \\ P_C + \rho_a g h_C = P_D + \rho_a g h_D \\ P_D + \rho g h_D = P_E + \rho g h_E \\ P_E + \frac{1}{2}\rho u_E^2 = P_F + \frac{1}{2}\rho U^2 \\ P_F + \rho g h_E = P_A + \rho g h_A \\ \bar{Q} = \rho \frac{\pi}{4} d^2 U \end{cases}$$

Risolviendo per U , avendo definito $H = h_C - h_D$:

$$\frac{1}{2}\rho U^2 = P_B - P_A = \dots = (\rho - \rho_a)gH \quad \Rightarrow \quad U = \sqrt{2\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)gH}$$

Inserendo i valori numerici: $U = 2.799m/s$, $\bar{Q} = 467.15kg/s$.

5.5.5 Exercise 5.5

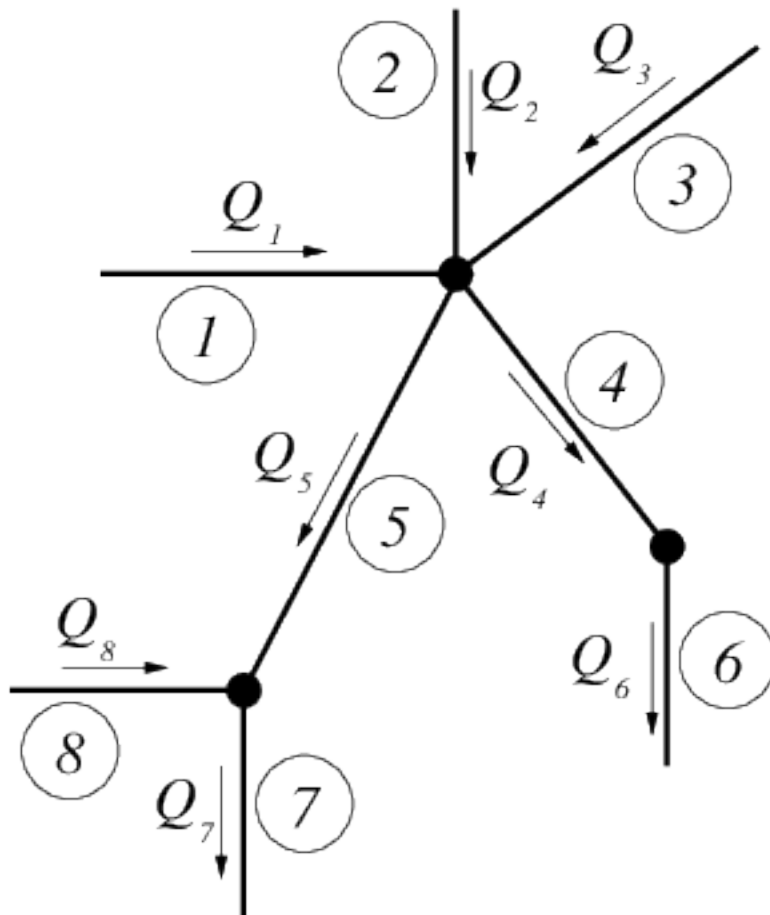
Exercise 5.5 Si consideri un getto stazionario, assialsimmetrico, d'acqua in condizioni standard, diretto verso l'alto, in atmosfera uniforme, secondo la verticale z , e uscente con velocità uniforme e costante $V = 20 \text{ m/s}$ da un ugello circolare di diametro $d = 5 \text{ cm}$. Si assuma che:

- la curvatura delle linee di flusso sia trascurabile;
- sia trascurabile ogni perdita di energia.

Si determinino:

1. il diametro D del getto alla quota $Z = 15 \text{ m}$ (misurata dal piano d'uscita dall'ugello);
2. la massima quota ideale H cui può giungere il getto.

($D = 6.97 \text{ cm}$, $H = 20.39 \text{ m}$)



Teorema di Bernoulli nell'ipotesi di stazionarietà, fluido incomprimibile, non viscoso, irrotazionale. Equazione della vorticità nel caso non viscoso.

- Il primo quesito del problema viene risolto mettendo a sistema l'equazione di Bernoulli (ipotesi...) e l'equazione della continuità.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho V^2 = \frac{1}{2}\rho u^2(z) + \rho g z \\ V d^2 = u(z) D^2 \end{cases} \Rightarrow D = \frac{d}{\left[1 - \frac{2gz}{V^2}\right]^{\frac{1}{4}}}$$

Inserendo i valori numerici $D = 6.97 \text{ cm}$.

- Il secondo quesito si ottiene ricavando dal teorema di Bernoulli la quota alla quale la velocità è nulla.

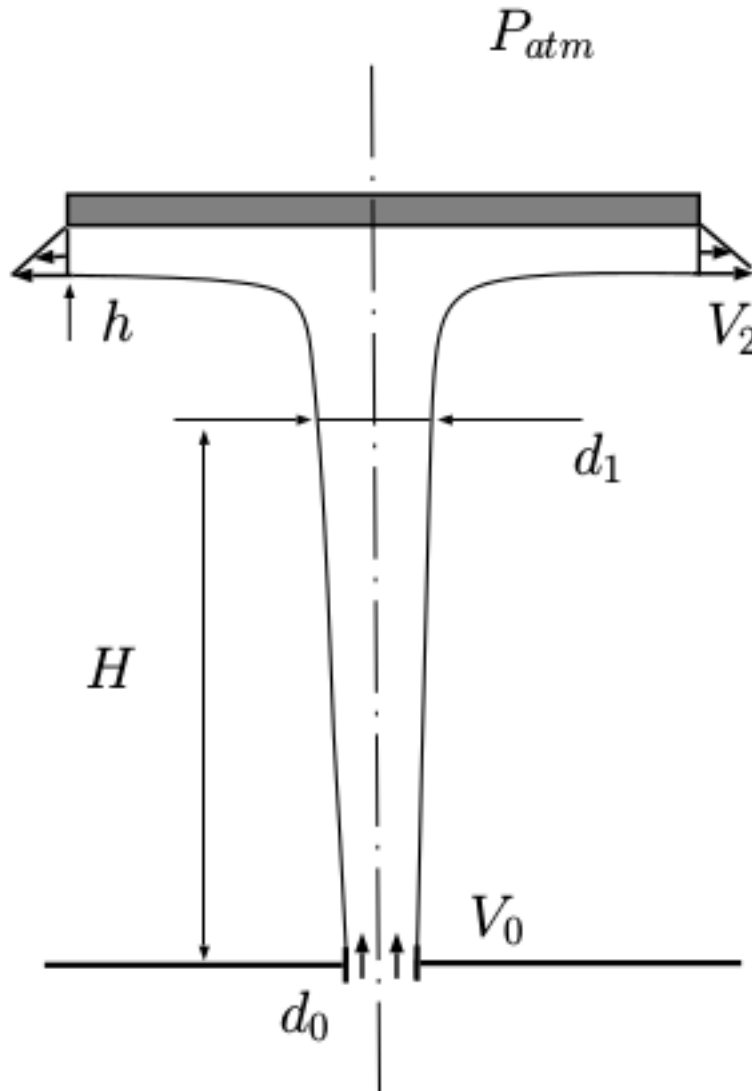
$$\frac{1}{2}\rho V^2 = \rho g H \quad \Rightarrow \quad H = \frac{1}{2} \frac{V^2}{g}$$

Inserendo i valori numerici $H = 20.39\text{m}$.

5.5.6 Exercise 5.6

Exercise 5.6 In un gioco d'acqua ($\rho = 999 \text{ kg/m}^3$), un disco di diametro $D = 35 \text{ cm}$ viene sollevato da un getto che fuoriesce con velocità $V_0 = 10 \text{ m/s}$ da un foro di diametro $d_0 = 8 \text{ cm}$ concentrico all'asse del disco, così come illustrato schematicamente in figura. Noto che in condizioni stazionarie la quota raggiunta dal disco è di poco superiore alla quota $H = 2 \text{ m}$, si richiede di determinare:

1. la velocità V_1 e il diametro d_1 del getto alla quota H supponendo trascurabili tra le sezioni 0 e 1 sia la curvatura delle linee di flusso che ogni forma di dissipazione;
2. lo spessore h del film d'acqua all'estremità del disco assumendo che il profilo di velocità radiale sia lineare con velocità massima $V_2 = V_1$.
3. la massa m del disco considerando trascurabili sia gli sforzi viscosi all'interfaccia tra l'atmosfera circostante ($P_{atm} = 101325 \text{ Pa}$) e il getto d'acqua che la forza gravitazionale agente sul fluido tra la quota H e la quota del disco. \end{itemize}



Teorema di Bernoulli nell'ipotesi di stazionarietà, fluido incomprimibile, non viscoso, irrotazionale. Bilanci integrali.

- Il primo punto viene risolto mettendo a sistema il teorema di Bernoulli e la continuità.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho V_0^2 = \frac{1}{2}\rho V_1^2(z) + \rho g H \\ V_0 d_0^2 = V_1 d_1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = V_0 \sqrt{1 - 2gH/V_0^2} \\ d_1 = \left[1 - \frac{2gH}{V_0^2}\right]^{-\frac{1}{4}} d_0 \end{cases}$$

- Il secondo punto viene risolto utilizzando solamente il bilancio di massa.

$$Q = \frac{\pi}{4}\rho V_0 d_0^2 = \frac{\pi}{4}\rho V_1 d_1^2 = \frac{\pi}{2} D h V_2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{d_1^2}{2D}$$

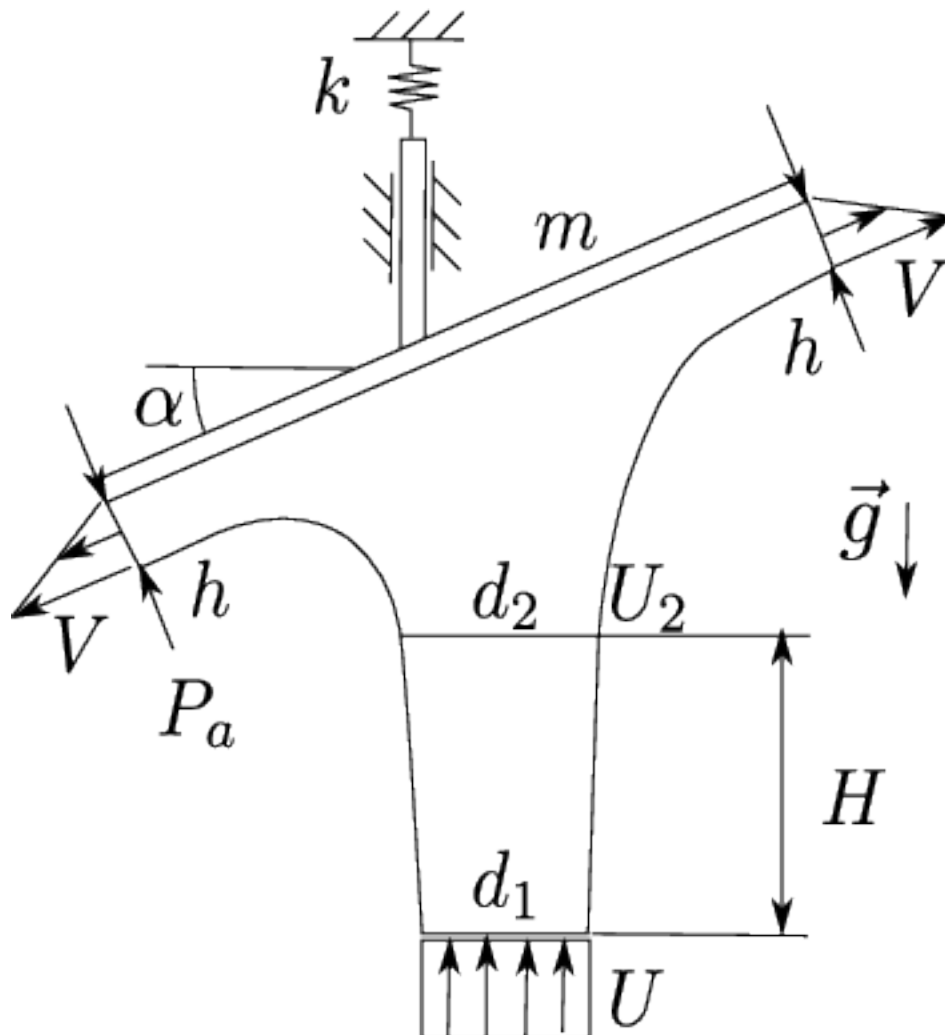
- Il terzo punto viene risolto applicando il bilancio della quantità di moto in direzione verticale per trovare la forza applicata dal disco al fluido. Infine si scrive l'equilibrio del disco soggetto alla stessa forza con verso opposto (principio di azione e reazione) e al proprio peso.

Dal bilancio si ottiene che la componente verticale della forza che si scambiano fluido e disco è uguale a $\rho V_1^2 \frac{\pi}{4} d_1^2$.
 La massa del disco è quindi $m = \frac{\pi}{4} d_1^2 \frac{\rho V_1^2}{g}$

5.5.7 Exercise 5.7

Exercise 5.7 Un getto di acqua ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$) colpisce una lamina di massa per unità di apertura $m = 1 \text{ kg/m}$ inclinata di un angolo $\alpha = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale, connessa a terra con una molla di costante elastica $k = 10^5 \text{ N/m}^2$. Il getto esce con profilo uniforme $U = 10 \text{ m/s}$ da una fessura larga $d_1 = 5 \text{ cm}$. Determinare:

- la velocità U_2 (uniforme) e lo spessore d_2 del getto alla quota $H = 1 \text{ m}$ sopra la fessura di uscita, supponendo trascurabili ogni forma di dissipazione e la curvatura delle linee di corrente;
- la velocità massima V del profilo triangolare di spessore $h = 2 \text{ cm}$, identico su entrambe le estremità della lamina;
- la deformazione della molla, considerando trascurabili gli sforzi viscosi all'interfaccia tra il getto e l'atmosfera circostante ($P_a = 101325 \text{ Pa}$) e la gravità agente sul fluido al di sopra della quota H .



Teorema di Bernoulli nell'ipotesi di stazionarietà, fluido incomprimibile, non viscoso, irrotazionale. Bilanci integrali.

- continuità + Bernoulli

$$\begin{cases} \rho dU = \rho d_2 U_2 \\ \frac{1}{2} \rho U^2 = \frac{1}{2} \rho U_2^2 + \rho g H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_2 = d_1 \left(1 - \frac{2gH}{U^2}\right)^{-1/2} = 0.0558 \text{ m} \\ U_2 = U \left(1 - \frac{2gH}{U^2}\right)^{1/2} = 8.96 \text{ m/s} \end{cases}$$

- continuità: in ingresso profilo uniforme, in uscita due profili triangolari.

$$U d_1 = 2 \frac{1}{2} V h \Rightarrow V = U \frac{d_1}{h} = 25 \text{ m/s}$$

- bilancio di massa + equilibrio corpo: pressione P_a ovunque; i due flussi di quantità di moto sulla lamina si bilanciano: rimane solo il termine in ingresso

$$\mathbf{R}_{fl} = - \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \dots = \rho U^2 \frac{d_1^2}{d_2} \hat{\mathbf{y}} = 4482.7 \text{ N} \hat{\mathbf{y}}$$

$$k \Delta x = mg - R \Rightarrow \Delta x = -0.0447 \text{ m (compressione)}$$

Exact solutions of Navier-Stokes equations

todo ...bla bla... Low- Re stable flows...

6.1 Introduzione e linee guida per la soluzione dei problemi

É possibile ricavare alcune soluzioni esatte stazionarie delle equazioni di Navier-Stokes, che descrivono il moto di un fluido viscoso, quando il dominio ha una geometria «semplice». In alcuni casi, come la corrente in un canale piano (Newton-Couette), la corrente in un tubo a sezione circolare (Poiseuille), o la corrente nel setto tra due cilindri rotanti (Taylor-Couette), per semplificare le equazioni è possibile sfruttare l'omogeneità del dominio (in qualche direzione) e, per ipotesi, della corrente. Nella maggioranza delle soluzioni esatte, i termini non lineari nelle equazioni si annullano, permettendo di ricavare abbastanza facilmente la soluzione delle equazioni.

In generale, le soluzioni stazionarie esatte presentate in questo capitolo sono significative quando il regime di moto è laminare. Senza entrare molto nel dettaglio, una soluzione stazionaria è una soluzione di equilibrio delle equazioni di Navier-Stokes, per la quale $\partial \mathbf{u} / \partial t = \mathbf{0}$. Un regime di moto instazionario può manifestarsi a causa di una «instabilità intrinseca» della corrente o a causa di una enorme amplificazione (*ricettività*) di disturbi, anche di intensità minima, sempre presenti in natura¹. Entrambi i processi che allontanano la corrente dalla condizione di equilibrio vengono innescati o amplificati all'aumentare del numero di Reynolds caratteristico della corrente. Qualitativamente, si può quindi affermare che le soluzioni stazionarie esatte sono rappresentative del fenomeno fisico quando il numero di Reynolds caratteristico assume valori «sufficientemente bassi», per i quali non si verificano instabilità intrinseche nella corrente e per i quali le perturbazioni e gli effetti di estremità (ad esempio, all'imbocco di un tubo) vengono smorzati dalla viscosità, rendendo la corrente stazionaria e omogenea.

¹ Il regime di moto periodico (e ordinato) che si manifesta nella corrente attorno a un cilindro quando il numero di Reynolds supera un valore critico ($Re_c \approx 46$) è il risultato di una «instabilità intrinseca» (*globale*) parametrica del sistema. La soluzione stazionaria stabile esistente per $Re < Re_c$ diventa instabile quando il parametro Re eccede il valore critico e nasce un ciclo limite (stabile) nel piano delle fasi del sistema. Il moto periodico e ordinato del sistema osservato nello sviluppo della *scia di Von Karman* a valle del cilindro, corrisponde alla dinamica del sistema sul ciclo limite. Mentre la corrente attorno a un corpo tozzo risulta abbastanza insensibile ai disturbi e perturbazioni esterni, altre correnti possono amplificare perturbazioni di intensità ridotta di diversi ordini di grandezza. Alcuni esempi sono uno strato limite, uno strato di mescolamento o un getto. In queste correnti dominate dalla convezione, l'enorme amplificazione può avvenire tramite meccanismi *non-modali*, che caratterizzano di sistemi dinamici lineari stabili non simmetrici.

In questa introduzione non c'è nessuna velleità di una descrizione precisa e completa di quelli che sono gli argomenti di studio della *stabilità fluidodinamica*, ma solamente la necessità di precisare i «limiti di validità» delle soluzioni esatte ricavate in questo capitolo.

6.2 Equazioni di Navier-Stokes in coordinate cartesiane e cilindriche

Le equazioni di Navier-Stokes vengono scritte nel sistema di coordinate più adeguato alla descrizione del problema, come ad esempio possono essere le coordinate cartesiane o quelle cilindriche. Le equazioni di Navier-Stokes per un fluido incomprimibile

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

accompagnate dalle condizioni iniziali e dalle condizioni al contorno opportune (e, qualora servissero, dalle condizioni di compatibilità dei dati), possono essere scritte ad esempio in un sistema di coordinate cartesiane

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \rho g_x \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g_y \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

o in un sistema di coordinate cilindriche

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho \left(\mathbf{u} \cdot \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} \right) - \mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = \rho g_r \\ \rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho \left(\mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) - \mu \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho g_\theta \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_z - \mu \nabla^2 u_z + \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \nabla b &= a_r \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial b}{\partial \theta} + a_z \frac{\partial b}{\partial z} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned}$$

6.3 Esempio in coordinate cartesiane: corrente di Poiseuille

Nel caso di corrente bidimensionale di Poiseuille in un canale piano, si usano le equazioni scritte nel sistema di coordinate cartesiane. Si sceglie l'asse x orientato lungo il canale e l'asse y perpendicolare alle pareti. Si fanno alcune ipotesi:

- stazionarietà: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$;
- omogeneità della coordinata x : il campo di velocità è indipendente dalla coordinata x . La derivata di tutte le componenti della velocità rispetto ad x è nulla: $\frac{\partial u_i}{\partial x} = 0$. È invece ammissibile che la pressione vari lungo x : da un

punto di vista fisico, è necessario un gradiente di pressione che equilibri gli sforzi a parete dovuti alla viscosità e che «spinga» il fluido nel canale; dal punto di vista matematico, è già stato accennato al ruolo particolare che svolge quel campo indicato con p , diverso dalla pressione termodinamica nel caso di fluido incomprimibile; si osservi poi che il campo p non compare mai nelle equazioni, se non sotto l'operatore di gradiente (o all'interno delle condizioni al contorno, che «fissano» un valore di p : è già stato sottolineato più volte che spesso il moto di un fluido incomprimibile è indipendente dal valore assoluto del campo p , mentre dipende da differenze, o dalle derivate, di p !).

- sfruttando la bidimensionalità della corrente, l'omogeneità della coordinata x e il vincolo di incomprimibilità si ottiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Questo implica che la componente v della velocità è costante in tutto il canale; sfruttando le condizioni al contorno di adesione a parete $\mathbf{u} = (u, v) = \mathbf{0}$ è evidente che la costante deve essere nulla: $v = 0$.

- supponiamo qui che, se vengono considerate le forze di volume, esse sono costanti e dirette lungo $-\hat{\mathbf{y}}$.

Le equazioni diventano quindi

$$\begin{cases} -\mu \left(\frac{d^2 u}{dy^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \end{cases}$$

dove la derivata parziale in y della componente u è stata sostituita dalla derivata ordinaria, poiché la velocità $\mathbf{u}(y)$ (e quindi tutte le sue componenti) dipende solo dalla coordinata y . La seconda equazione integrata dà come risultato (p dipende sia da x sia da y):

$$p(x, y) = -\rho g y + f(x)$$

Inserita nella prima:

$$\mu \left(\frac{d^2 u}{dy^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Nell'ultima equazione, i termini a sinistra dell'uguale sono funzione solo della variabile indipendente y , quelli a destra dell'uguale solo di x : affinché l'uguaglianza possa essere sempre valida, i due termini devono essere costanti; si sceglie di definire questa costante $-G_P$ (con questa G_P assumerà valore positivo). Si possono quindi risolvere le due equazioni

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{d^2 u}{dy^2} \right) = -G_P \\ \frac{\partial p}{\partial x} = -G_P \end{cases}$$

accompagnate dalle opportune condizioni al contorno. Osservando il sistema ([eqn:poiseuille]{reference-type=»ref» reference=»eqn:poiseuille»}), nelle equazioni compare la derivata seconda in y della componente u della velocità, la derivata prima sia in x sia in y di p : è ragionevole pensare che servano due condizioni al contorno in y per u , una condizione al contorno per p in x e una in y . In particolare, sulle pareti del canale (alto H) la velocità del fluido deve essere nulla, per le condizioni al contorno di adesione. Per quando riguarda la pressione, si può fissare il valore in un punto del dominio, ad esempio l'origine degli assi $p(0, 0) = p_0$.

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ u(x, H) = 0 \\ p(0, 0) = p_0 \end{cases}$$

Le equazioni ([eqn:poiseuille2]{reference-type=>ref> reference=>eqn:poiseuille2}) con le condizioni al contorno appena elencate danno come risultato:

$$\begin{cases} u(y) = -\frac{G_P}{2\mu}y(y-H) \\ p(x,y) = p_0 - \rho gy - G_P x \end{cases}$$

6.4 Calcolo del vettore sforzo

Se vengono chieste azioni (risultanti di forze o momenti) esercitate dal fluido sul solido, è necessario calcolare lo sforzo a parete $\mathbf{t}_{n,s}$ esercitato sul solido, uguale e contrario allo sforzo esercitato dal solido sul fluido \mathbf{t}_n . Il vettore sforzo \mathbf{t}_n su una superficie con giacitura definita dal versore normale $\hat{\mathbf{n}}$ si può esprimere come il prodotto del versore $\hat{\mathbf{n}}$ e il tensore degli sforzi \mathbb{T} ,

$$\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T} = \hat{\mathbf{n}} \cdot [-p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}] = -p\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{s}_n,$$

avendo utilizzato la relazione costitutiva $\mathbb{S} = 2\mu\mathbb{D}$ per un fluido incomprimibile newtoniano, che lega il tensore degli sforzi viscosi \mathbb{S} al tensore velocità di deformazione \mathbb{D} tramite il coefficiente di viscosità dinamica μ . Il vettore $\mathbf{s}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{S}$ è il vettore degli sforzi viscosi. È possibile trasformare la relazione ([eqn:stress_tensor]{reference-type=>ref> reference=>eqn:stress_tensor}) in una relazione che contenga solamente operazioni tra vettori,

$$\mathbf{t}_n = -p\hat{\mathbf{n}} + \mu[2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{u})] = -p\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{s}_n.$$

Questa espressione può risultare vantaggiosa quando è richiesto il calcolo del vettore degli sforzi in sistemi di coordinate non cartesiani. Mentre esistono molte tabelle che raccolgono l'espressione delle operazioni vettoriali in sistemi di coordinate non cartesiane, sono più rare tabelle che raccolgono la forma in componenti di operazioni tensoriali.

In sistemi di coordinate cartesiane, è facile calcolare il vettore sforzo come prodotto tensoriale tra il versore normale $\hat{\mathbf{n}}$ e il tensore degli sforzi, le cui componenti sono facili da calcolare

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D} = -p\mathbb{I} + 2\mu \left[\frac{1}{2} (\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u}) \right] \\ T_{ij} &= -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]. \end{aligned}$$

Ad esempio, per una corrente in uno spazio bidimensionale descritto dalle coordinate cartesiane (x, y) le componenti del tensore degli sforzi possono essere raccolte in forma matriciale,

$$\mathbb{T} = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Sfruttando la simmetria del tensore degli sforzi, $T_{ij} = T_{ji}$, il vettore sforzo $t_i = n_j T_{ji} = T_{ij} n_j$ può essere calcolato come prodotto matrice vettore. Come esempio, viene calcolato lo sforzo a parete in un canale piano, nel quale scorre un fluido con un campo di velocità che ha solamente la componente parallela alle pareti che dipende dalla coordinata perpendicolare ad esse, $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u(y)\hat{\mathbf{x}}$. Facendo riferimento alla corrente di Poiseuille della sezione precedente, il vettore sforzo agente sul fluido in corrispondenza della parete interiore a $y = 0$, si ottiene moltiplicando il versore normale uscente dal fluido $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{y}}$ per il tensore degli sforzi,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -p & \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ p \end{bmatrix} \\ \rightarrow \mathbf{t}_n &= -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \hat{\mathbf{x}} + p \hat{\mathbf{y}} = -\frac{G_P H}{2} \hat{\mathbf{x}} + p \hat{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Lo sforzo sulla parete inferiore è l'opposto $\mathbf{t}_{n,s} = \frac{G_P H}{2} \hat{\mathbf{x}} - p \hat{\mathbf{y}}$. Sulla parete superiore, a $y = H$, la normale uscente dal fluido è $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{y}}$, la derivata $\partial u / \partial y(x, H) = -G_P / (2\mu)$. Svolgendo i conti, come fatto per la parete inferiore, si ottiene che lo sforzo agente sulla parete superiore è $\mathbf{t}_{n,s} = \frac{G_P H}{2} \hat{\mathbf{x}} + p \hat{\mathbf{y}}$.

6.4.1 Equivalenza tra l'espressione tensoriale e vettoriale del vettore sforzo.

Per i più curiosi e i più «matematici», si dimostra infine l'equivalenza tra ([eqn:stress_tensor]{reference-type=»ref» reference=»eqn:stress_tensor«}) e ([eqn:stress_vector]{reference-type=»ref» reference=»eqn:stress_vector«}). Questa dimostrazione viene fatta ricorrendo alla notazione indiciale, sfruttando le proprietà di permutazione degli indici del simbolo ϵ_{ijk} e la proprietà dei simboli ϵ_{ijk} e $\delta_{a,b}$,

$$\epsilon_{kij} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}.$$

La componente i -esima di $\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}$ è

$$\begin{aligned} \{\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}\}_i &= \epsilon_{ijk} n_j \{\nabla \times \mathbf{u}\}_k = \\ &= \epsilon_{ijk} n_j \epsilon_{klm} \partial_l u_m = \\ &= \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} n_j \partial_l u_m = \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) n_j \partial_l u_m = \\ &= n_j \partial_i u_j - n_j \partial_j u_i = \\ &= n_j \partial_i u_j + n_j \partial_j u_i - 2n_j \partial_j u_i = \\ &= 2n_j \frac{1}{2} (\partial_i u_j + n_j \partial_j u_i) - 2n_j \partial_j u_i = \\ &= \{2\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{D} - 2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u}\}_i \end{aligned}$$

Il contributo viscoso al vettore sforzo è uguale al primo termine a destra dell'uguale moltiplicato per la viscosità dinamica μ , $\mathbf{s}_n = 2\mu \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{D}$; il vettore sforzo \mathbf{t}_n è la somma del vettore degli sforzi viscosi \mathbf{s}_n e del vettore degli sforzi (normali) dovuti alla «pressione», $\mathbf{t}_n = \mathbf{s}_n - p \hat{\mathbf{n}}$.

- $p \hat{\mathbf{n}}$. Si ottiene così l'identità desiderata

$$\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T} = \hat{\mathbf{n}} \cdot [-p \mathbb{I} + 2\mu \mathbb{D}] = -p \hat{\mathbf{n}} + \mu [2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{u})] = -p \hat{\mathbf{n}} + \mathbf{s}_n.$$

Si ricorda che le identità vettoriali e tensoriali sono indipendenti dal sistema di riferimento in cui vengono scritte le componenti: per la loro dimostrazione si può utilizzare un sistema di coordinate qualsiasi (spesso le coordinate cartesiani sono un sistema di coordinate conveniente, poiché le espressioni delle operazioni e degli operatori differenziali sono semplici da ricordare e utilizzare).

6.4.2 Osservazione: vettore sforzo in coordinate cilindriche.

È possibile calcolare le componenti del prodotto $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T}$ svolgendo un prodotto matrice-vettore anche per sistemi di coordinate non cartesiani. In questo caso, però, la forma delle operazioni vettoriali e tensoriali e le componenti del tensore sono «non banali». Per esempio le coordinate cartesiane del gradiente $\nabla \mathbf{v}$ di un campo vettoriale \mathbf{v} sono uguali a $\partial v_i / \partial x_j$, mentre le componenti in coordinate cilindriche sono raccolte nella seguente matrice 3×3 ,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix},$$

se riferite alla base fisica $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{z}})$. Bisogna quindi prestare attenzione nella scrittura delle componenti di tensori e operatori quando si usano sistemi di coordinate non cartesiane. Per il calcolo del vettore sforzo si consiglia quindi di usare, la formula

(??) che contiene solo operazioni vettoriali, per le quali è più facile trovare tavole che ne raccolgano le espressioni in componenti in diversi sistemi di coordinate.

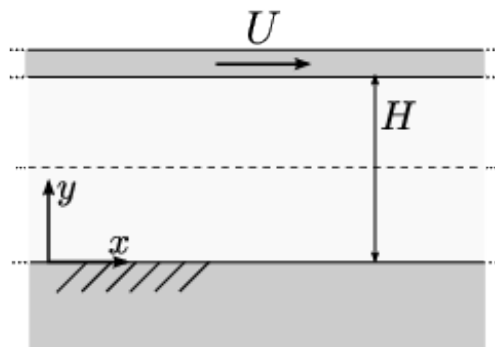
Per concludere questa sezione, viene ricavata l'espressione del vettore degli sforzi viscosi in coordinate cartesiane come prodotto $2\mu\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{D}$. Poichè il sistema di coordinate cilindriche (fisiche, riferite alla base $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{z}})$) è un sistema ortogonale, le componenti del vettore degli sforzi viscosi possono essere calcolate con il prodotto matrice vettore,

$$\begin{bmatrix} t_r \\ t_\theta \\ t_z \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 2\frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta) & \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ sym & \frac{2}{r}(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} \\ sym & sym & 2\frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_r \\ n_\theta \\ n_z \end{bmatrix} .$$

Come esercizio, è possibile utilizzare l'espressione vettoriale ([eqn:stress_vector]{reference-type=»ref» reference=»eqn:stress_vector»}) per verificare la validità dell'espressione appena trovata del vettore sforzo in coordinate cilindriche.

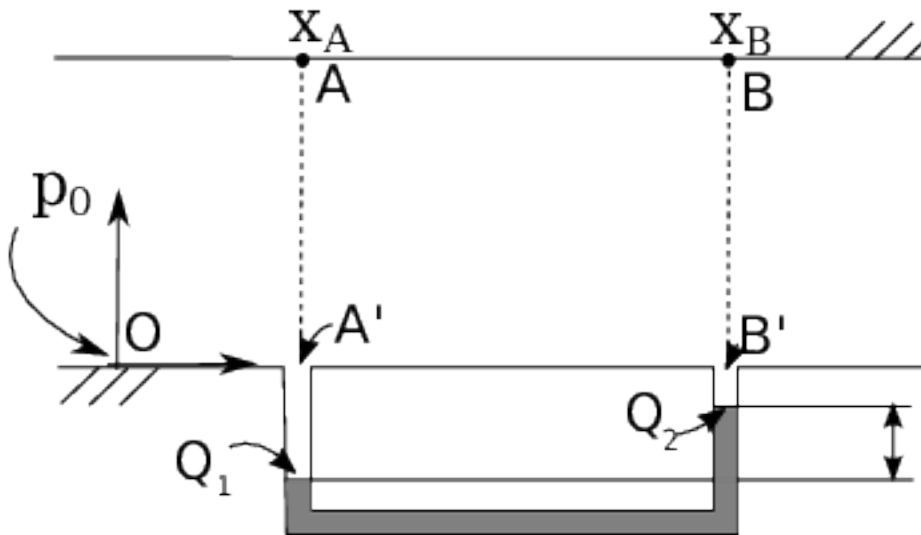
6.5 Exercises

Exercise 6.1 In un canale piano, di lunghezza e apertura infinita, orizzontale, di altezza $H = 1.51 \text{ mm}$, delimitato da una parete inferiore fissa e da una parete superiore mobile con velocità orizzontale, costante e positiva $U = 0.31 \text{ m/s}$, scorre acqua in condizioni standard. Per quale valore del gradiente di pressione $G_P = -\partial P/\partial x$ la portata nel canale risulta nulla? Si trascurino le forze di volume.



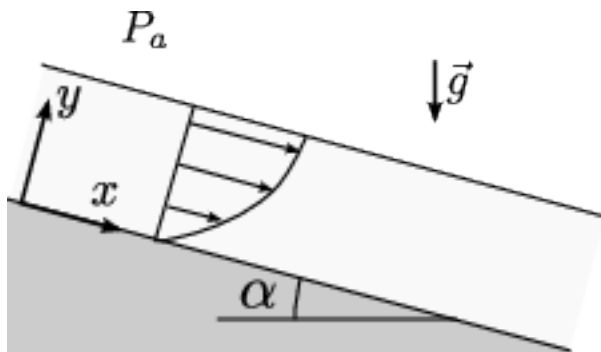
Exercise 6.2 Una corrente di Poiseuille di acqua ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 10^{-3} \text{ kg/(ms)}$) scorre in un canale di altezza $H = 1 \text{ cm}$. Un manometro misura la differenza di pressione tra le sezioni in $x_A = 1.0 \text{ m}$ e $x_B = 2.0 \text{ m}$. Determinare:

- il gradiente di pressione all'interno del condotto, conoscendo la densità del liquido barometrico $\bar{\rho} = 1200 \text{ kg/m}^3$ e la differenza di quote $h = 5 \text{ mm}$;
- la velocità massima all'interno del canale;
- la risultante \mathbf{R} delle forze esercitata dal fluido sul tratto di parete superiore compreso tra A e B, sapendo che sulla sezione $x = 0 \text{ m}$ la pressione vale $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$. Qual è la relazione tra R_x e $p_A - p_B$? Commento.



Exercise 6.3 Si consideri una corrente d'acqua a pelo libero, laminare e stazionaria, che scorre su una parete piana di lunghezza e apertura infinita inclinata di un angolo α rispetto all'orizzontale. Sul pelo libero la pressione è uniforme e uguale a P_a . Lo sforzo tangenziale fra acqua e aria viene considerato nullo.

Si calcoli il profilo di velocità nello strato di acqua e il campo di pressione.



Exercise 6.4 Si consideri una corrente d'acqua a pelo libero, laminare e stazionaria, che scorre su una parete verticale piana di lunghezza e apertura infinita. Si ipotizzi che la pressione atmosferica che agisce sul pelo libero sia uniforme. Si ipotizzi inoltre che lo sforzo tangenziale fra acqua e aria in corrispondenza del pelo libero sia nullo.

Assegnata la portata in massa per unità di apertura $\bar{Q} = 0.5 \text{ kg/(ms)}$, determinare

- lo spessore h della corrente d'acqua;
- lo sforzo tangenziale a parete;

- la velocità in corrispondenza del pelo libero;
- la velocità media e il numero di Reynolds basato su tale velocità media e sullo spessore della corrente.

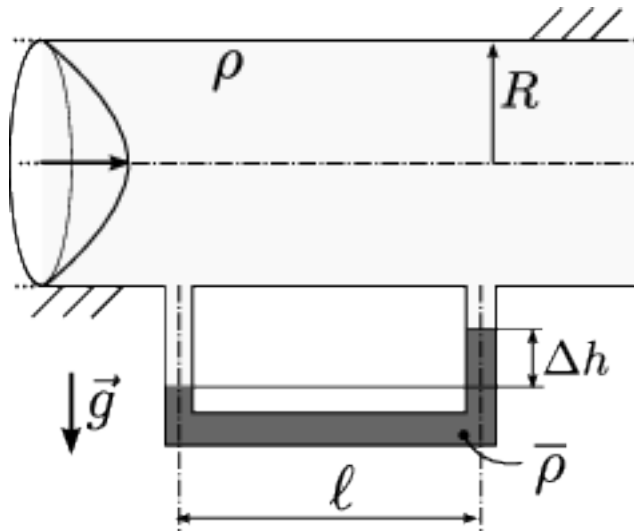
Si sostituisca poi al pelo libero una parete solida. Si determini quale dovrebbe essere la velocità di tale parete per ottenere una portata nulla.

Dati: $\bar{\rho} = 999 \text{ kg/m}^3$, $\bar{\mu} = 1.15 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(ms)}$.

($h = 5.61 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $\tau = 5.494 \text{ Pa}$, $u(h) = 1.339 \text{ m/s}$,

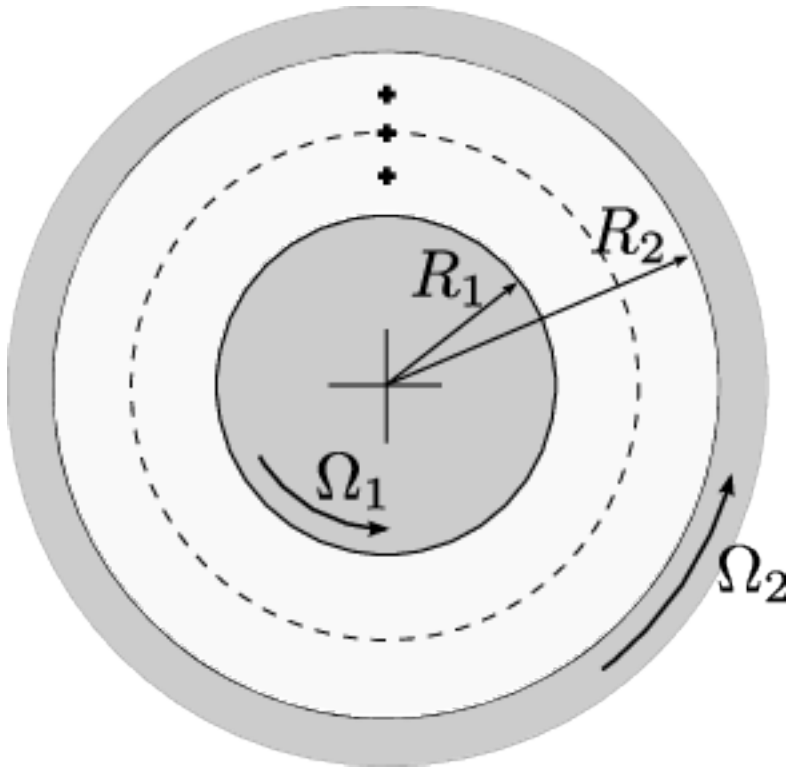
Exercise 6.5 Un manometro a mercurio ($\rho_{hg} = 13610 \text{ kg/m}^3$) collega due prese di pressione posizionate a una distanza di $l = 2 \text{ m}$ l'una dall'altra lungo un tubo orizzontale di diametro $2R = 5 \text{ cm}$ in cui scorre un fluido con densità $\rho_f = 950 \text{ kg/m}^3$. Se la differenza fra le altezze dei peli liberi del liquido manometrico nelle due colonne vale $\Delta h = 4 \text{ cm}$ e la portata volumetrica che scorre nel tubo è $Q = 6 \text{ m}^3/\text{s}$, quanto valgono la viscosità μ del fluido e lo sforzo a parete τ_w ?

($\mu = 6.36 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(ms)}$, $\tau_w = 31.05 \text{ N/m}^2$)

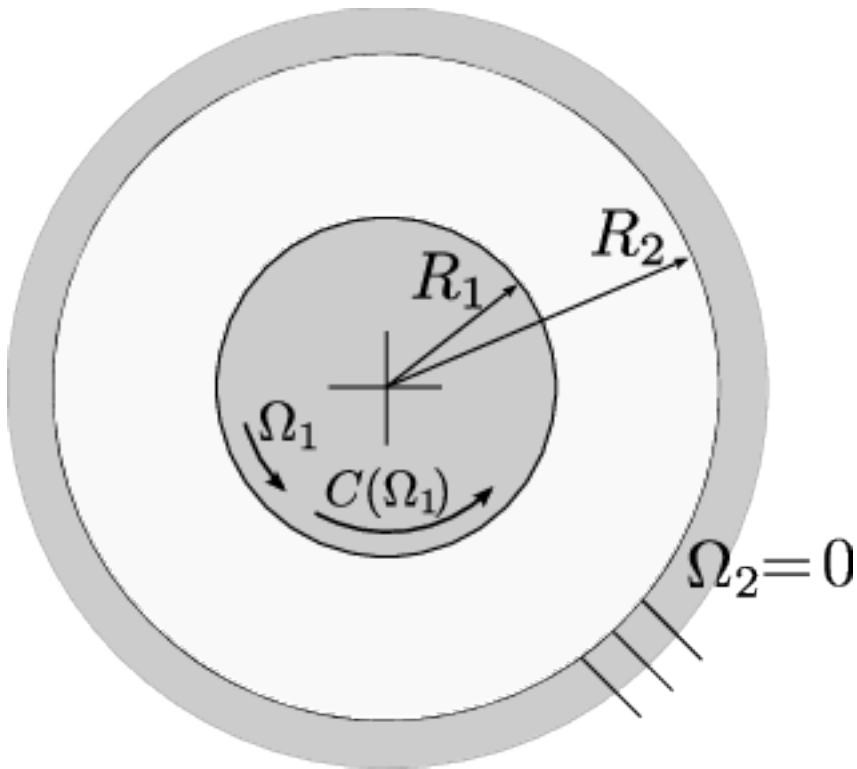


Exercise 6.6 Si consideri la corrente piana fra due cilindri coassiali rotanti. Si misura la velocità in due punti posti rispettivamente a $1/4$ e $3/4$ del gap fra i due cilindri: $u_{\theta,1/4} = 0.5 \text{ m/s}$, $u_{\theta,3/4} = 0.8 \text{ m/s}$. Si determini la velocità di rotazione dei due cilindri nonché la pressione in corrispondenza del cilindro interno sapendo che la pressione in corrispondenza del cilindro esterno vale 5 Pa , che la densità del fluido è pari a 1.225 kg/m^3 , che il diametro del cilindro interno è $d = 2R_1 = 0.1 \text{ m}$ e che il diametro del cilindro esterno è $D = 2R_2 = 0.16 \text{ m}$.

($\Omega_1 = 6.663 \text{ s}^{-1}$, $\Omega_2 = 11.743 \text{ s}^{-1}$ \newline $P(r) = P_2 - \rho \left[\frac{1}{2} A^2 (R_2^2 - r^2) + 2AB \ln \frac{R_2}{r} - \frac{1}{2} B^2 \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right]$, \newline con $u_{\theta}(r) = Ar + B/r$.)



Exercise 6.7 Si consideri la corrente piana di un fluido di densità ρ fra due cilindri coassiali di raggio R_1 e R_2 . Il cilindro esterno è fermo, mentre quello interno è messo in rotazione da un motore con curva caratteristica $C_{disp}(\Omega) = \alpha - \beta\Omega$. Si determini il punto di equilibrio del sistema (Ω costante).

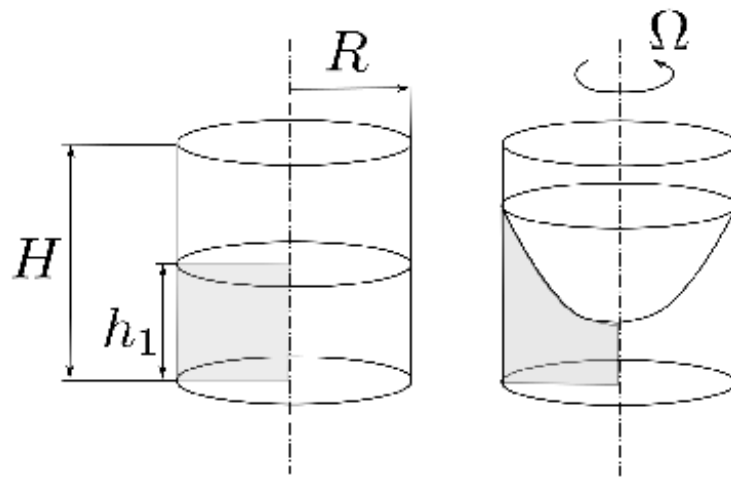


Exercise 6.8 Un contenitore cilindrico (raggio R , altezza H) è riempito fino ad una quota $h_1 = H/2$ di un liquido di

densità ρ . Il contenitore è messo poi in rotazione con velocità angolare costante Ω . Una volta esaurito il transitorio, viene chiesto di trovare:

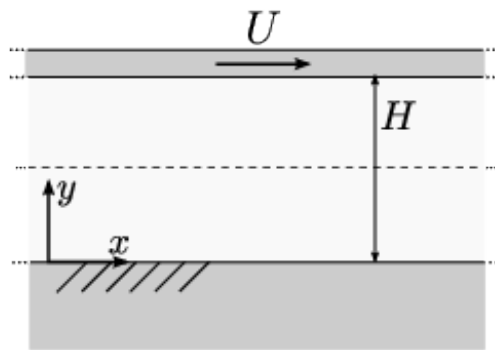
- la forma che assume il liquido all'interno del contenitore;
- la velocità Ω_{max} alla quale il liquido inizia a uscire dal contenitore;
- il campo di pressione quando il corpo ruota con velocità angolare Ω_{max} .

$$(R: z_{free}(r) = \frac{\Omega^2 r^2}{2g} - \frac{\Omega^2 R^2}{4g} + \frac{H}{2} \quad \Omega_{max} = \sqrt{\frac{2gH}{R^2}} \quad P(r) = \dots)$$



6.5.1 Exercise 6.1

Exercise 6.1 In un canale piano, di lunghezza e apertura infinita, orizzontale, di altezza $H = 1.51 \text{ mm}$, delimitato da una parete inferiore fissa e da una parete superiore mobile con velocità orizzontale, costante e positiva $U = 0.31 \text{ m/s}$, scorre acqua in condizioni standard. Per quale valore del gradiente di pressione $G_P = -\partial P/\partial x$ la portata nel canale risulta nulla? \newline Si trascurino le forze di volume.



Semplificazione delle equazioni di NS in coordinate cartesiane per descrivere la corrente in un canale piano infinito messo in moto da un gradiente di pressione (corrente di Poiseuille) e dal trascinamento dovuto al movimento di una parete del canale (corrente di Newton).

In questo problema, la corrente nel canale ha due «forzanti»: il moto a (velocità costante) della parete superiore e il gradiente di pressione G_P lungo il canale. Il problema chiede di trovare il valore di G_P tale che la portata nel canale sia nulla quando i due effetti si combinano. Il problema viene risolto ricavando il profilo di velocità in funzione del gradiente di velocità dalle equazioni di NS opportunamente semplificate e successivamente il valore del gradiente di pressione necessario ad avere portata nulla. La geometria del problema suggerisce di utilizzare un sistema di coordinate cartesiane.

- Scrittura delle equazioni di NS in coordinate cartesiane in 2 dimensioni.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = f_y \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

- Semplificazione delle equazioni di NS per il problema considerato. Vengono fatte le seguenti ipotesi:

- problema stazionario: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$;

- direzione x omogenea (canale infinito in direzione x): $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$;

non si può dire altrettanto della pressione, a causa del ruolo che questa ha nelle equazioni di NS incomprimibili. Il campo di pressione può essere interpretato come un moltiplicatore di Lagrange necessario a imporre il vincolo di incomprimibilità. Inoltre, ad eccezione di alcune condizioni al contorno, non appare mai direttamente come pressione p ma solamente con le sue derivate spaziali. Da un punto di vista più fisico, la differenza di pressione lungo il canale è la forzante che mette in moto il fluido in una corrente di Poiseuille.

- la condizione $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ inserita nel vincolo di incomprimibilità, implica $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$; poichè $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ segue che $v = \text{cost} = 0$, poichè è nulla a parete per la condizione al contorno di adesione, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

- no forze di volume: $\mathbf{f} = 0$.

Le equazioni di NS possono essere semplificate

$$\begin{cases} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda segue che la pressione può essere funzione solo di x . Nella prima, il termine a sinistra dell'uguale è funzione solo di y ; quello di destra può essere funzione solo di x : l'uguaglianza implica che entrambi i membri sono costanti. Definiamo questa costante come $G_P = -\frac{\partial p}{\partial x}$: si noti che questo è il «gradiente di pressione» lungo

il canale, cambiato di segno. $\$ \begin{cases} -\mu u''(y) = G_P & y \in [0, H] \\ u(0) = 0 \\ u(H) = U \end{cases} \$$

- Soluzione dell'equazione differenziale con dati al contorno: si integra due volte e si impongono le condizioni al contorno per ottenere la componente u del campo di velocità.

$$\Rightarrow u(y) = -\frac{G_P}{2\mu} y^2 + \left(\frac{G_P}{2\mu} H + \frac{U}{H} \right) y.$$

- Calcolo della portata come integrale della velocità.

$$Q = \int_0^H u(y)dy = \frac{G_P}{12\mu}H^3 + \frac{1}{2}UH$$

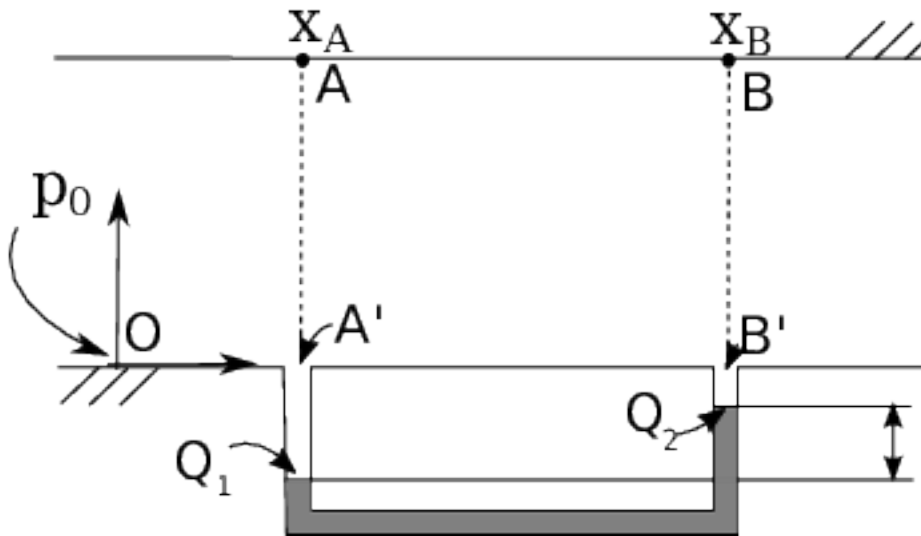
Infine, imponendo la condizione di portata nulla $Q = 0$, si ottiene il valore di G_P :

$$G_P = -6\frac{\mu U}{H^2} \quad \Rightarrow \quad G_P = -930Pa/m$$

6.5.2 Exercise 6.2

Exercise 6.2 Una corrente di Poiseuille di acqua ($\rho = 1000/kg/m^3$, $\mu = 10^{-3} kg/(ms)$) scorre in un canale di altezza $H = 1 cm$. Un manometro misura la differenza di pressione tra le sezioni in $x_A = 1.0 m$ e $x_B = 2.0 m$. Determinare:

- il gradiente di pressione all'interno del condotto, conoscendo la densità del liquido barometrico $\bar{\rho} = 1200 kg/m^3$ e la differenza di quote $h = 5 mm$;
- la velocità massima all'interno del canale;
- la risultante \mathbf{R} delle forze esercitata dal fluido sul tratto di parete superiore compreso tra A e B, sapendo che sulla sezione $x = 0 m$ la pressione vale $p_0 = 10^5 Pa$. Qual è la relazione tra R_x e $p_A - p_B$? Commento.



Soluzione esatte delle equazioni di Navier-Stokes. Corrente di Poiseuille nel canale piano 2D. Manometro: leggi della statica (Stevino).

- Per trovare la derivata in direzione x della pressione all'interno del canale ($\partial P/\partial x = -G_P = cost.$ per la corrente di Poiseuille) risolve il problema di statica all'interno del manometro. Facendo riferimento al disegno, si utilizza Stevino tra i punti $A' - Q_1$, $Q_1 - Q_2$, $Q_2 - B'$ e l'informazione di derivata della pressione costante in direzione x all'interno del canale, tra A' e B' .

$$\begin{cases} p_{A'} = p_{Q_1} - \rho g z_{Q_1} \\ p_{Q_1} - \bar{\rho} g z_{Q_1} = p_{Q_2} - \bar{\rho} g z_{Q_2} \\ p_{B'} = p_{Q_2} - \rho g z_{Q_2} \\ p_{A'} - p_{B'} = G_P \Delta x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad G_P = \frac{1}{\Delta x} (\bar{\rho} - \rho) g \Delta h$$

avendo svolto correttamente i conti e riconosciuto $z_{Q_2} - z_{Q_1} = \Delta h$.

- Ricordando che il profilo di velocità di Poiseuille risulta $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{x}}u(y)$, con

$$u(y) = -\frac{G_P}{2\mu}y(y-H),$$

la velocità massima all'interno del canale è $V = u(H/2) = \frac{G_P}{8\mu}H^2$

- Per calcolare la risultante degli sforzi sul tratto $A-B$ della parete superiore, è necessario calcolare il vettore sforzo agente su di essa e svolgere un semplice integrale. Il vettore sforzo agente sulla parete superiore risulta

$$\mathbf{t} = -\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=H} \hat{\mathbf{x}} + p(x, H) \hat{\mathbf{y}}.$$

La pressione $p(x, H)$ sulla parete superiore, per $x \in [x_A, x_B]$ si calcola come segue: si parte dall'origine del sistema di riferimento O , in corrispondenza della quale è noto il valore della pressione p_0 e ci si muove in orizzontale ricordando che $\partial P/\partial x = -G_P$ e in verticale ricordando che $\partial P/\partial y = -\rho g$.

$$\begin{aligned} p_{A'} &= p_0 - G_P x_A & \rightarrow & \quad p(x, H) = p_A - G_P(x - x_A) \\ p_A &= p_{A'} - \rho g H \end{aligned}$$

Lo sforzo tangenziale sulla parete è costante e vale

$$-\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=H} = \frac{G_P}{2} H$$

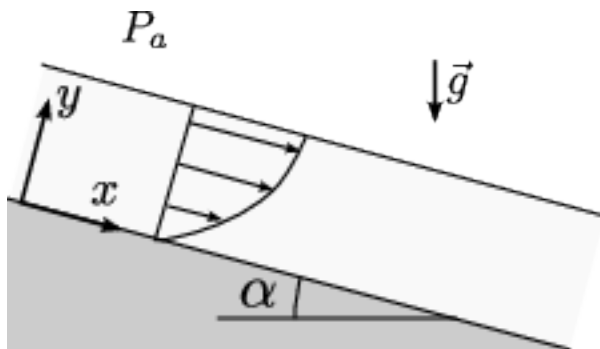
La risultante delle forze (per unità di lunghezza, poichè il problema è bidimensionale) si ottiene integrando lo sforzo tra A e B . Facendo comparire il valore p_B della pressione in B , l'espressione della risultante delle forze diventa

$$\mathbf{R} = \frac{G_P}{2} H \Delta x \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} (p_A + p_B) \Delta x \hat{\mathbf{y}}.$$

6.5.3 Exercise 6.3

Exercise 6.3 Si consideri una corrente d'acqua a pelo libero, laminare e stazionaria, che scorre su una parete piana di lunghezza e apertura infinita inclinata di un angolo α rispetto all'orizzontale. Sul pelo libero la pressione è uniforme e uguale a P_a . Lo sforzo tangenziale fra acqua e aria viene considerato nullo.

Si calcoli il profilo di velocità nello strato di acqua e il campo di pressione.



Semplificazione delle equazioni di NS in casi particolari. Soluzioni esatte in coordinate cartesiane.

Si scelga un sistema di riferimento cartesiano con l'asse x orientato lungo la parete verso il basso e l'asse y perpendicolare ed uscente ad essa. Sulla corrente di questo problema agiscono le forze di volume dovute alla gravità. L'ipotesi che la pressione sia uniforme sulla superficie di interfaccia tra acqua e aria implica che la pressione è indipendente dalla coordinata x in tutto il fluido.

- Scrittura delle equazioni di NS in coordinate cartesiane in 2 dimensioni.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = f_y \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

- Semplificazione delle equazioni di NS per il problema considerato. Vengono fatte le seguenti ipotesi:

- problema stazionario: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$;
- direzione x omogenea (canale infinito in direzione x): $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$;

non si può dire altrettanto della pressione, a causa del ruolo che questa ha nelle equazioni di NS incomprimibili. Il campo di pressione può essere interpretato come un moltiplicatore di Lagrange necessario a imporre il vincolo di incomprimibilità. Inoltre, ad eccezione di alcune condizioni al contorno, non appare mai direttamente come pressione p ma solamente con le sue derivate spaziali. Da un punto di vista più fisico, la differenza di pressione lungo il canale è la forzante che mette in moto il fluido in una corrente di Poiseuille.

- la condizione $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ inserita nel vincolo di incomprimibilità, implica $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$; poichè $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ segue che $v = \text{cost} = 0$, poichè è nulla a parete per la condizione al contorno di adesione, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- no forze di volume: $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g} = \rho g \sin \alpha \hat{\mathbf{x}} - \rho g \cos \alpha \hat{\mathbf{y}}$.

Le equazioni di NS possono essere semplificate

$$\begin{cases} -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \alpha \\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos \alpha \end{cases}$$

Dalla seconda segue che l'espressione del campo di pressione è

$$p(x, y) = -\rho g y \cos \alpha + f(x) .$$

L'espressione di $f(x)$ può essere calcolata imponendo la condizione al contorno sul pelo libero, $p(x, H) = P_a$,

$$P_a = -\rho g H \cos \alpha + f(x) \quad \rightarrow \quad f(x) = P_a + \rho g H \cos \alpha .$$

La funzione $f(x)$ è costante, senza dipendere dalla coordinata x . Di conseguenza, il campo di pressione dipende solo dalla coordinata y

$$p(x, y) = P_a + \rho g (H - y) \cos \alpha ,$$

e la derivata di $\partial p / \partial x$ è nulla. La componente x dell'equazione della quantità di moto diventa quindi un'equazione ordinaria del secondo ordine

$$\begin{cases} -\mu u''(y) = \rho g \sin \alpha , \quad y \in [0, H] \\ u(0) = 0 \\ u'(H) = 0 , \end{cases}$$

con le condizioni al contorno di adesione a parete e di sforzo di taglio nullo all'interfaccia tra aria ed acqua, $0 = \tau(H) = \mu \frac{\partial u}{\partial y}(H) = \mu u'(H)$. La derivata parziale in y è stata sostituita da quella ordinaria, poichè la velocità è solo funzione di y .

- Soluzione dell'equazione differenziale con dati al contorno: si integra due volte e si impongono le condizioni al contorno per ottenere la componente u del campo di velocità.

$$u(y) = -\frac{\rho g}{2\mu}y(y-H)\sin\alpha.$$

6.5.4 Exercise 6.4

Exercise 6.4 Si consideri una corrente d'acqua a pelo libero, laminare e stazionaria, che scorre su una parete verticale piana di lunghezza e apertura infinita. Si ipotizzi che la pressione atmosferica che agisce sul pelo libero sia uniforme. Si ipotizzi inoltre che lo sforzo tangenziale fra acqua e aria in corrispondenza del pelo libero sia nullo.

Assegnata la portata in massa per unità di apertura $\bar{Q} = 0.5 \text{ kg}/(\text{ms})$, determinare

- lo spessore h della corrente d'acqua;
- lo sforzo tangenziale a parete;
- la velocità in corrispondenza del pelo libero;
- la velocità media e il numero di Reynolds basato su tale velocità media e sullo spessore della corrente.

Si sostituisca poi al pelo libero una parete solida. Si determini quale dovrebbe essere la velocità di tale parete per ottenere una portata nulla.

Dati: $\bar{\rho} = 999 \text{ kg}/\text{m}^3$, $\bar{\mu} = 1.15 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{ms})$.

($h = 5.61 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $\tau = 5.494 \text{ Pa}$, $u(h) = 1.339 \text{ m}/\text{s}$,

Semplificazione delle equazioni di NS in casi particolari. Soluzioni esatte in coordinate cartesiane.

Si scelga un sistema di riferimento cartesiano con l'asse x orientato lungo la parete verso il basso e l'asse y perpendicolare ed uscente ad essa.

Sulla corrente di questo problema agisce la forza di volume dovuta alla gravità.

L'ipotesi che la pressione sia uniforme sulla superficie di interfaccia tra acqua e aria implica che la pressione è costante in tutto il fluido: si vedrà che $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$; se sulla superficie libera la pressione è costante e non varia nello spessore, allora la pressione è costante in tutto il fluido.

- Scrittura delle equazioni di NS in 2 dimensioni.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = f_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} - \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = f_y \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

- Semplificazione delle equazioni di NS per il problema da affrontare.

Ipotesi:

- problema stazionario: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$;
- direzione x omogenea (canale infinito in direzione x): $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$; la pressione nelle equazioni di NS incomprimibili è un moltiplicatore di Lagrange per imporre il vincolo di incomprimibilità; inoltre non appare mai, se non nelle condizioni al contorno, come p ma solo con le sue derivate spaziali: quindi non è corretto imporre $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, nonostante la direzione x sia omogenea;
- $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ inserito nel vincolo di incomprimibilità ($\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$) implica $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$; poiché $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ e $v = 0$ a parete per la condizione al contorno di adesione, segue che $v = \text{cost} = 0$;
- forze di volume solo in direzione verticale: per come sono stati orientati gli assi, $\mathbf{f} = g\hat{\mathbf{x}}$.

$$\begin{cases} -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda segue che la pressione può essere funzione solo di x . Come già detto in precedenza, la pressione sulla superficie libera è costante e uguale alla pressione ambiente P_a : se la pressione non può variare nello spessore, allora è costante ovunque. La derivata parziale $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, il suo gradiente è nullo e quindi la pressione è costante in tutta la corrente di acqua.

Nella prima, il termine a sinistra dell'uguale è funzione solo di y ; quello di destra è costante e uguale a ρg . Le condizioni al contorno sono di adesione a parete e di sforzo di taglio nullo all'interfaccia tra aria ed acqua: $0 = \tau(H) = \mu \frac{\partial u}{\partial y}(H) = \mu u'(H)$, dove la derivata parziale in y è stata sostituita da quella ordinaria, poichè la velocità è solo funzione di y .

$$\begin{cases} -\mu u''(y) = \rho g, y \in [0, H] \\ u(0) = 0 \\ u'(H) = 0 \end{cases}$$

- Soluzione dell'equazione differenziale (semplice) con dati al contorno.

Risulta:

$$\Rightarrow u(y) = -\frac{\rho g}{2\mu} y^2 + \frac{\rho g}{\mu} Hy$$

- Calcolo della portata come integrale della velocità; si trova così la relazione tra Q ed H.

$$Q = \int_0^H \rho u(y) dy = \frac{1}{3} \frac{\rho^2 g}{\mu} H^3$$

E quindi

$$H = \left(\frac{3Q\mu}{\rho^2 g} \right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow H = 5.61 \cdot 10^{-4} m$$

- Calcolo dello sforzo a parete

$$\tau = \mu u'|_{y=0} = \rho g H \Rightarrow \tau = 5.494 Pa$$

Osservazione. Equilibrio con la forza di gravità (problema stazionario).

- Calcolo di $u(H)$.

$$u(H) = \frac{1}{2} \frac{\rho g}{\mu} H^2 \Rightarrow u(H) = 1.342 m/s$$

- Calcolo velocità media e numero di Reynolds.

$$\bar{U} = \frac{1}{H} \int_0^H u(y) dy = \frac{Q}{\rho H} \Rightarrow \bar{U} = \frac{Q}{\rho H} = \frac{2}{3} u(H) = 0.895 m/s$$

$$Re = \frac{\rho \bar{U} H}{\mu} \Rightarrow Re = 434.8$$

L'ultima parte del problema chiede di sostituire alla superficie libera, una parete infinita. L'equazione trovata in precedenza è ancora valida; è necessario però sostituire la condizione di sforzo tangenziale nullo con adesione su una parete mobile con velocità costante U .

$$\begin{cases} -\mu u''(y) = \rho g, y \in [0, H] \\ u(0) = 0 \\ u(H) = U \end{cases}$$

Il profilo di velocità è:

$$u(y) = \frac{\rho g}{2\mu}(-y^2 + yH) + \frac{U}{H}y$$

dove la velocità U è ancora incognita. Per trovarne il valore, si calcola la portata e la si pone uguale a zero. La portata è uguale a

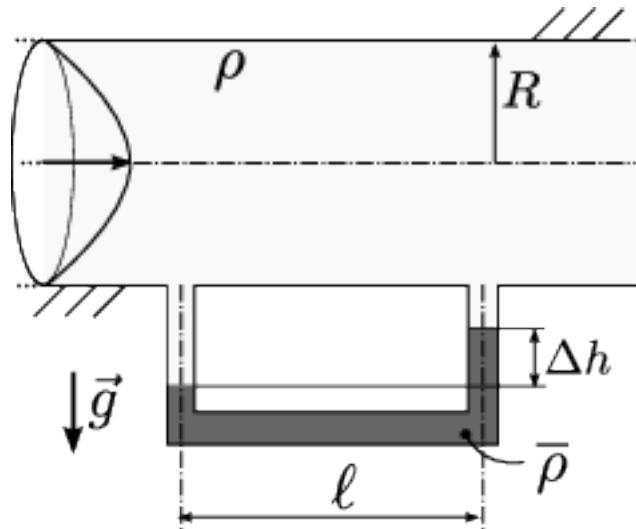
$$Q = \int_0^H u(y)dy = \dots = \frac{1}{12} \frac{\rho g H^3}{\mu} + \frac{1}{2}UH$$

Imponendo $Q = 0$,

$$U = -\frac{\rho g H^2}{6\mu} \Rightarrow U = -0.4474 \text{ m/s}$$

6.5.5 Exercise 6.5

Exercise 6.5 Un manometro a mercurio ($\rho_{hg} = 13610 \text{ kg/m}^3$) collega due prese di pressione posizionate a una distanza di $l = 2 \text{ m}$ l'una dall'altra lungo un tubo orizzontale di diametro $2R = 5 \text{ cm}$ in cui scorre un fluido con densità $\rho_f = 950 \text{ kg/m}^3$. Se la differenza fra le altezze dei peli liberi del liquido manometrico nelle due colonne vale $\Delta h = 4 \text{ cm}$ e la portata volumetrica che scorre nel tubo è $Q = 6 \text{ m}^3/\text{s}$, quanto valgono la viscosità μ del fluido e lo sforzo a parete τ_w ? ($\mu = 6.36 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m s)}$, $\tau_w = 31.05 \text{ N/m}^2$)



Semplificazione delle equazioni di NS in casi particolari. Soluzioni esatte in coordinate cilindriche. Legge di Stevino.

Scrittura del contributo viscoso del vettore sforzo come:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_n &= \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \mu[\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \mu[2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}] \end{aligned}$$

La geometria del problema suggerisce di utilizzare un sistema di coordinate cilindriche.

- Scrittura delle equazioni di NS in coordinate cilindriche

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho \left(\mathbf{u} \cdot \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} \right) - \mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = f_r \\ \rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho \left(\mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) - \mu \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = f_\theta \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_z - \mu \nabla^2 u_z + \frac{\partial p}{\partial z} = f_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

con

$$\mathbf{a} \cdot \nabla b = a_r \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial b}{\partial \theta} + a_z \frac{\partial b}{\partial z}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- Semplificazione delle equazioni di NS per il problema considerato. Vengono fatte le seguenti ipotesi:

- problema stazionario: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$;
- direzione z omogenea (canale infinito in direzione z): $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$; come discusso negli esercizi in geometria cartesiana, il termine $\frac{\partial P}{\partial z} = -G_P$ è costante e in generale diverso da zero.
- problema assialsimmetrico: $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$;
- no swirl: $u_\theta = 0$;
- dall'incomprimibilità e dalle condizioni al contorno a parete, segue che la componente radiale della velocità è identicamente nulla, $u_r = 0$;
- no forze di volume: $\mathbf{f} = 0$.

Grazie alle ipotesi fatte, il campo di velocità assume la forma $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u(r)\hat{\mathbf{z}}$. La componente radiale e azimuthale dell'equazione della quantità di moto sono identicamente soddisfatte, mentre la componente lungo z diventa

$$\begin{cases} \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} u(r) \right) = -G_P & r \in [0, R] \\ u(0) = \text{valore finito} \\ u(R) = 0 \end{cases}$$

dove la derivata ordinaria $\frac{d}{dr}$ è stata utilizzata al posto della derivata parziale, poichè la componente assiale della velocità dipende solamente dalla coordinata radiale, $u(r)$. Le condizioni al contorno garantiscono che il campo di velocità sia regolare nel dominio (in particolare che non esistano singolarità sull'asse) e che sia soddisfatta la condizione al contorno di adesione a parete.

- Soluzione dell'equazione differenziale. Si integra due volte e si ottiene:

$$u(r) = -\frac{G_P}{4\mu} r^2 + A \ln r + B$$

Imponendo le condizioni al contorno, A deve essere nullo per l'ipotesi di valore finito in $r = 0$ ($\ln r \rightarrow -\infty$ quando $r \rightarrow 0$). Imponendo poi la condizione di adesione a parete per $r = R$, si ottiene:

$$u(r) = -\frac{G_P}{4\mu} (r^2 - R^2).$$

- Calcolo della portata: si integra la velocità sulla sezione circolare (!) del tubo. Questa relazione lega il gradiente di pressione G_P alla portata Q e al coefficiente di viscosità dinamica μ ,

$$Q = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R u(r) r dr d\theta = 2\pi \int_{r=0}^R u(r) r dr = \frac{\pi G_P R^4}{8 \mu}.$$

La differenza di pressione tra i due punti A e B (separati da una distanza l) è quindi $P_B - P_A = -G_P l$.

- Applicazione della legge di Stevino per ottenere il sistema risolvante:

$$\begin{cases} P_1 = P_A + \rho_f g H_0 & \text{(Stevino tra 1 e A)} \\ P_2 = P_B + \rho_f g (H_0 - \Delta h) & \text{(Stevino tra 2 e B)} \\ P_B = P_A - G_P l & \text{(relazione trovata dalla sln di NS)} \\ P_2 = P_1 - \rho_{Hg} g \Delta h & \text{(Stevino tra 1 e 2)} \end{cases}$$

Risolviendo il sistema, si trova che:

$$G_P l = (\rho_{Hg} - \rho_f) g \Delta h$$

Esplicitando il legame tra G_P e μ , si ottiene il risultato:

$$\Rightarrow \mu = \frac{\pi R^4}{8 Q l} (\rho_{Hg} - \rho_f) g \Delta h \Rightarrow \mu = 6.36 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{ms}$$

- Bisogna calcolare ora τ_w , la componente parallela alla parete dello sforzo a parete. Usando l'espressione vettoriale della parte viscosa del vettore sforzo agente sul fluido (aiutandosi con le tabelle per le espressioni in coordinate cilindriche degli operatori differenziali) con $\mathbf{u} = u_z(r) \hat{\mathbf{z}}$ e $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$, si può scrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_n &= \mu [2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}] = \\ &= \mu \left[2 \frac{\partial u_z}{\partial r} \hat{\mathbf{z}} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \hat{\mathbf{z}} \right] = \\ &= \mu \frac{\partial u_z}{\partial r} \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

Ricordando che lo sforzo agente sulla parete è uguale e contrario a quello agente sul fluido e che lo sforzo dovuto alla pressione è normale alla parete,

$$\begin{aligned} \tau_w &= -\mu \left. \frac{\partial u_z}{\partial r} \right|_{r=R} = \\ &= \frac{1}{2} G_P R. \end{aligned}$$

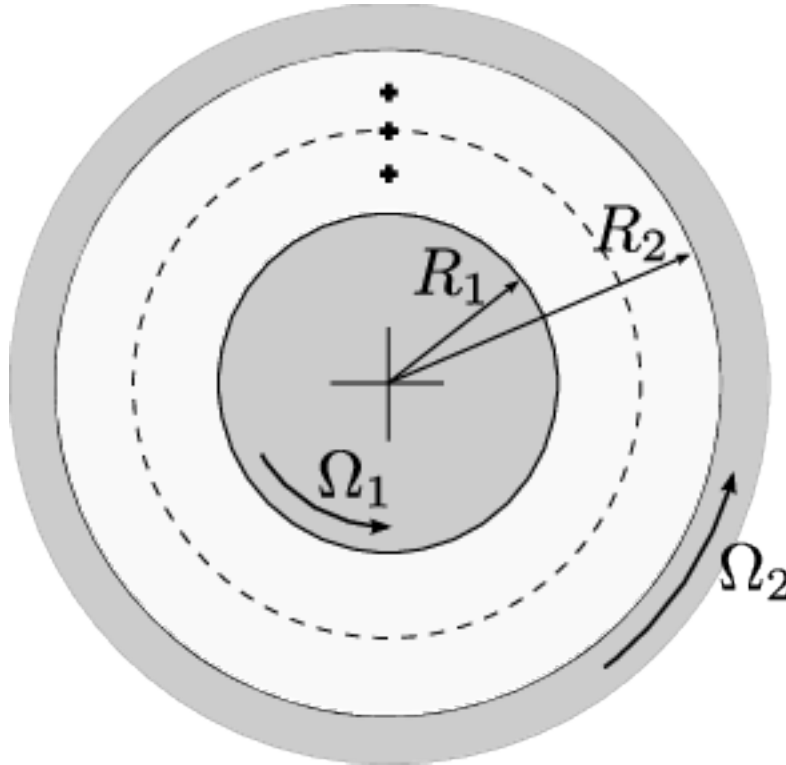
Si ottiene quindi il valore, $\tau_w = 31.05 N/m^2$.

L'espressione dello sforzo tangenziale a parete $\tau_w = -\mu \frac{\partial u_z}{\partial r}$ per la corrente di Poiseuille in un tubo a sezione circolare è simile a quella ottenuta per la corrente in un canale piano, in coordinate cartesiane, $\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$. In questi due casi, la componente tangenziale dello sforzo è proporzionale alla derivata in direzione perpendicolare alla parete della componente di velocità parallela alla parete. Questa **NON** è una formula generale per lo sforzo tangenziale a parete, come sarà evidente nel caso della corrente di Taylor-Couette.

6.5.6 Exercise 6.6

Exercise 6.6 Si consideri la corrente piana fra due cilindri coassiali rotanti. Si misura la velocità in due punti posti rispettivamente a $1/4$ e $3/4$ del gap fra i due cilindri: $u_{\theta,1/4} = 0.5 \text{ m/s}$, $u_{\theta,3/4} = 0.8 \text{ m/s}$. Si determini la velocità di rotazione dei due cilindri nonché la pressione in corrispondenza del cilindro interno sapendo che la pressione in corrispondenza del cilindro esterno vale 5 Pa , che la densità del fluido è pari a 1.225 kg/m^3 , che il diametro del cilindro interno è $d = 2R_1 = 0.1 \text{ m}$ e che il diametro del cilindro esterno è $D = 2R_2 = 0.16 \text{ m}$.

$$(\Omega_1 = 6.663 \text{ s}^{-1}, \Omega_2 = 11.743 \text{ s}^{-1} \text{ newline } P(r) = P_2 - \rho \left[\frac{1}{2} A^2 (R_2^2 - r^2) + 2AB \ln \frac{R_2}{r} - \frac{1}{2} B^2 \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right], \text{ newline con } u_\theta(r) = Ar + B/r.)$$



Soluzione esatte delle equazioni di Navier-Stokes in geometria cilindrica. Corrente di Taylor-Couette.

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho \left(\mathbf{u} \cdot \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} \right) - \mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = f_r \\ \rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho \left(\mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) - \mu \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = f_\theta \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_z - \mu \nabla^2 u_z + \frac{\partial p}{\partial z} = f_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \nabla b &= a_r \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial b}{\partial \theta} + a_z \frac{\partial b}{\partial z} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Il problema viene risolto calcolando prima le velocità angolari dei cilindri e successivamente la pressione.

- La soluzione di Taylor-Couette viene ricavata dall'espressione semplificata delle equazioni di Navier-Stokes,

$$\begin{cases} -\rho \frac{u_\theta^2}{r} + \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{u_\theta}{r^2} = 0, \end{cases}$$

ottenute imponendo che il campo di moto sia bidimensionale $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u_\theta(r, \theta)\hat{\mathbf{e}}_\theta + u_r(r, \theta)\hat{\mathbf{r}}$, che la soluzione sia omogenea rispetto alla coordinata θ e sfruttando le condizioni al contorno e il vincolo di incomprimibilità per ricavare $u_r(\theta) = 0$. Sia il campo di pressione sia il campo di velocità dipendono solamente dalla coordinata radiale, $P = P(r)$, $u_\theta = u_\theta(r)$. Le derivate parziali possono essere quindi trasformate in derivate ordinarie. La seconda equazione è disaccoppiata dalla prima e può essere risolta, una volta imposte le condizioni al contorno. Trovato il campo di moto da questa equazione, la prima viene usata per calcolare il campo di pressione. La seconda equazione può essere riscritta come (svolgere le derivate per credere!)

$$\begin{cases} -\left(\frac{1}{r} (ru_\theta)'\right)' = 0 \\ u_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1 \\ u_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r} \\ u_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1 \\ u_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2 \end{cases} \quad \text{A,B from b.c.}$$

Il campo di moto tra due cilindri coassiali rotanti è

$$u_\theta(r) = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}.$$

La soluzione esatta di Taylor-Couette è facile da ricavare, se si ricorda che è la somma di una rotazione rigida e un vortice irrotazionale: imponendo la forma $u_\theta(r) = Ar + B/r$ e le condizioni al contorno,

$$u_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1, \quad u_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2$$

si ottiene la formula voluta.

- Calcolo delle velocità angolari dei cilindri. Nota la forma del campo di moto e le velocità in due punti a diversi raggi, è possibile calcolare Ω_1, Ω_2 risolvendo un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite. Note le misure di velocità $u_{\theta,1/4} = u_\theta(r_{1/4}), u_{\theta,3/4} = u_\theta(r_{3/4})$, il sistema risolvente diventa:

$$\begin{bmatrix} -\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r_{1/4} + \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r_{1/4}} & \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} r_{1/4} - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r_{1/4}} \\ -\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r_{3/4} + \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r_{3/4}} & \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} r_{3/4} - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r_{3/4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{\theta,1/4} \\ u_{\theta,3/4} \end{bmatrix}$$

- Calcolo della pressione. Una volta noto il campo di moto, è possibile calcolare il campo di pressione dalla componente radiale dell'equazione della quantità di moto,

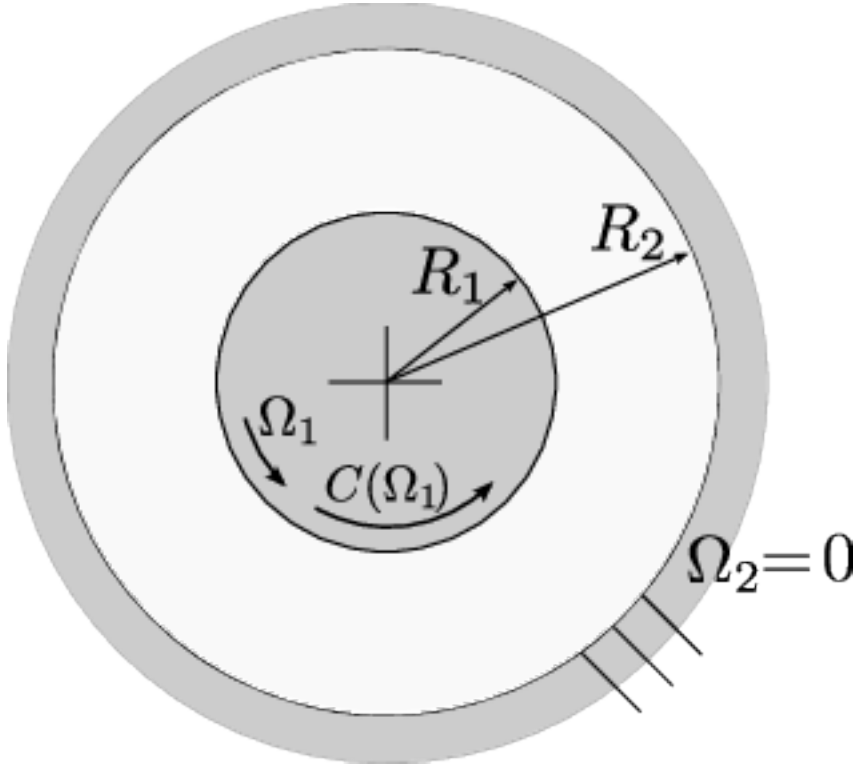
$$\begin{aligned} P'(r) &= \rho \frac{u_\theta^2}{r}, \quad \text{con } P(R_2) = P_2 \\ &\rightarrow \int_r^{R_2} \frac{dP}{dr} dr = \int_r^{R_2} \rho \frac{1}{r} \left(Ar + \frac{B}{r} \right)^2 dr \end{aligned}$$

Da questa si ricava

$$P(r) = P_2 - \rho \left[\frac{1}{2} A^2 (R_2^2 - r^2) + 2AB \ln \frac{R_2}{r} - \frac{1}{2} B^2 \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right].$$

6.5.7 Exercise 6.7

Exercise 6.7 Si consideri la corrente piana di un fluido di densità ρ fra due cilindri coassiali di raggio R_1 e R_2 . Il cilindro esterno è fermo, mentre quello interno è messo in rotazione da un motore con curva caratteristica $C_{disp}(\Omega) = \alpha - \beta\Omega$. Si determini il punto di equilibrio del sistema (Ω costante).



Soluzione esatte delle equazioni di Navier-Stokes in geometria cilindrica. Corrente di Taylor-Couette.

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho \left(\mathbf{u} \cdot \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} \right) - \mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = f_r \\ \rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho \left(\mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) - \mu \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = f_\theta \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_z - \mu \nabla^2 u_z + \frac{\partial p}{\partial z} = f_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \nabla b &= a_r \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial b}{\partial \theta} + a_z \frac{\partial b}{\partial z} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Espressione vettoriale del contributo viscoso del vettore sforzo,

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_n &= \mathbb{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \mu [\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \mu [2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}] \end{aligned}$$

Viene risolto il problema piano, nel quale i campi di velocità e di pressione hanno la forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u_r(r, \theta) \hat{\mathbf{r}} + u_\theta(r, \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad , \quad P(\mathbf{r}) = P(r, \theta) \quad ,$$

e le azioni integrali (come la coppia fornita e quella incognita) sono intese per unità di lunghezza, essendo la «dimensione mancante» quella fuori dal piano del disegno.

- Calcolo delle velocità angolari dei cilindri. Nota la forma del campo di moto e le velocità in due punti a diversi raggi, è possibile calcolare Ω_1, Ω_2 risolvendo un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite. Il campo di moto tra due cilindri coassiali rotanti è:

$$u_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r} = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}.$$

Se il cilindro esterno è fermo e la velocità angolare del cilindro interno vale $\Omega_1 = \Omega$, i coefficienti A e B valgono

$$A = -\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \Omega < 0, \quad B = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \Omega > 0.$$

La soluzione esatta di Taylor-Couette è facile da ricavare, se si ricorda che è la somma di una rotazione rigida e un vortice irrotazionale: imponendo la forma $u_\theta(r) = Ar + B/r$ e le condizioni al contorno,

$$u_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1, \quad u_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2$$

si ottiene la formula voluta.

- Calcolo dello sforzo tangenziale a parete per determinare il puto di equilibrio del sistema. Si determina la componente tangenziale (quella che contribuisce alla coppia resistente) dello sforzo sul cilindro interno. Il contributo viscoso del vettore sforzo può essere scritto come:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_n &= \mathbb{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \mu [\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \mu [2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}] = \quad (\text{verificare con le tabelle}) \\ &= \mu \left[2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right] \hat{\mathbf{z}} = \\ &= \mu \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right] \hat{\mathbf{z}} = \quad (u_\theta = Ar + B/r) \\ &= -2\mu \frac{B}{r^2} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

La formula dello sforzo tangenziale a parete per la corrente di Taylor-Couette è $\tau_w = \mu \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right]$,

La parte tangenziale dello sforzo a parete sul cilindro interno è quindi $\tau_w = 2\mu B/R_1^2$. Integrando il prodotto tra vettore sforzo e raggio R_1 sulla superficie laterale del cilindro si ottiene la coppia resistente,

$$\begin{aligned} C_{res}(\Omega) &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \tau_w(R_1) R_1 R_1 d\theta = \\ &= 2\pi \tau_w(R_1) R_1^2 = -4\pi \mu \frac{B(\Omega)}{R_1^2} R_1^2 = -4\pi \mu \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \Omega = -\gamma \Omega. \end{aligned}$$

All'equilibrio, la somma della coppia disponibile e di quella resistente deve essere uguale a zero,

$$0 = C_{disp}(\Omega) + C_{res}(\Omega) = \alpha - \beta \Omega - \gamma \Omega,$$

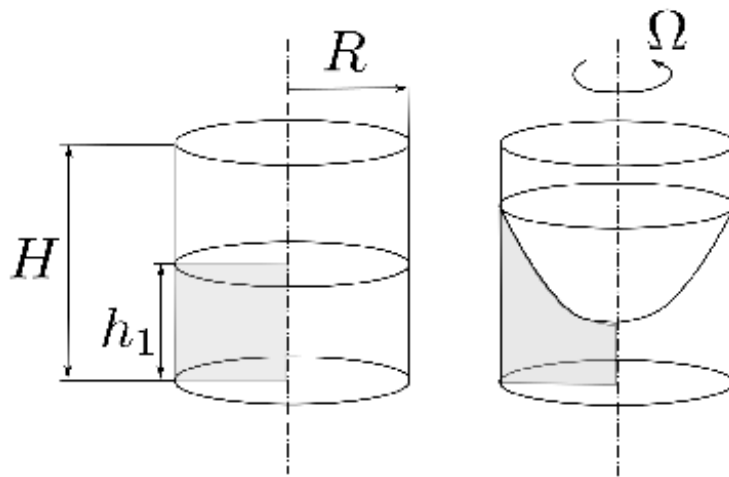
e quindi $\Omega = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}$.

6.5.8 Exercise 6.8

Exercise 6.8 Un contenitore cilindrico (raggio R , altezza H) è riempito fino ad una quota $h_1 = H/2$ di un liquido di densità ρ . Il contenitore è messo poi in rotazione con velocità angolare costante Ω . Una volta esaurito il transitorio, viene chiesto di trovare:

- la forma che assume il liquido all'interno del contenitore;
- la velocità Ω_{max} alla quale il liquido inizia a uscire dal contenitore;
- il campo di pressione quando il corpo ruota con velocità angolare Ω_{max} .

$$(R: z_{free}(r) = \frac{\Omega^2 r^2}{2g} - \frac{\Omega^2 R^2}{4g} + \frac{H}{2} \quad \Omega_{max} = \sqrt{\frac{2gH}{R^2}} \quad P(r) = \dots)$$



Soluzione esatte delle equazioni di Navier-Stokes. Fluido in rotazione rigida, con superficie superiore libera.

- Si usano le equazioni di NS in coordinate cilindriche. Seguendo un procedimento analogo a quello svolto per ottenere la soluzione esatta di Taylor-Couette, ma senza trascurare l'effetto della gravità, si ottiene la seguente coppia di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \\ \frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{u_\theta^2}{r} \end{cases}$$

Il campo di moto descrive una rotazione rigida, poichè il termine $1/r$ della soluzione di Taylor-Couette non è ammissibile (l'asse appartiene al dominio, non ha senso una velocità che tende all'infinito). La costante di proporzionalità tra u_θ ed r è la velocità angolare Ω per soddisfare le condizioni al contorno a parete, $u_\theta(R) = \Omega R$.

$$u_\theta(r) = \Omega r$$

Dall'integrazione delle due equazioni ([eqn:vessel_cyl]{reference-type=>ref} reference=>eqn:vessel_cyl}) si ottiene il campo di pressione $P(r, z)$, a meno di una costante di integrazione C

$$P(r, z) = -\rho g z + \rho \frac{\Omega^2 r^2}{2} + C$$

La condizione al contorno necessaria è $P(r, z_{free}(r)) = P_a$; sulla superficie libera, la cui quota è descritta dalla funzione $z_{free}(r)$ (ancora incognita), agisce la pressione ambiente P_a

$$P(r, z_{free}(r)) = -\rho g z_{free} + \rho \frac{\Omega^2 r^2}{2} + C = P_a$$

↓

$$z_{free}(r) = \frac{\Omega^2 r^2}{2g} - \frac{P_a - C}{\rho g}$$

Per determinare la costante C bisogna ricorrere alla conservazione della massa. La massa contenuta all'interno del recipiente non varia (fino a quando il liquido non esce). Se si considera densità costante ρ , bisogna scrivere la conservazione del volume tra istante iniziale $V_0 = \pi R^2 H/2$ e condizione a regime V . Il volume V viene calcolato tramite un'integrale di volume, comodo da descrivere in coordinate cilindriche:

$$\begin{aligned} V &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \int_{z=0}^{z=z_{free}(r)} r dr dz d\theta = \\ &= 2\pi \int_{r=0}^R z_{free}(r) r dr = \\ &= 2\pi \int_{r=0}^R \left[\frac{\Omega^2 r^3}{2g} - \frac{P_a - C}{\rho g} \right] r dr = \\ &= 2\pi \left[\frac{\Omega^2 R^4}{8g} - \frac{(P_a - C)}{2\rho g} R^2 \right] = \\ &= \pi \left[\frac{\Omega^2 R^4}{4g} - \frac{(P_a - C)}{\rho g} R^2 \right] = \end{aligned}$$

Uguagliando V_0 e V si ottiene

$$-\frac{(P_a - C)R}{\rho g} = -\frac{\Omega^2 R^4}{4g} + R^2 \frac{H}{2}$$

termine che può essere sostituito in ([eqn:zfree]{reference-type=>ref} reference=>eqn:zfree})

$$z_{free}(r) = \frac{\Omega^2 r^2}{2g} - \frac{\Omega^2 R^2}{4g} + \frac{H}{2}$$

La superficie libera ha la forma di un paraboloide. La concavità del paraboloide è diretta verso l'alto e aumenta all'aumentare di $|\Omega|$ (il risultato è indipendente dal verso di rotazione, e quindi dal segno di Ω , poichè compare con potenze pari). La quota del vertice $z_v = -\frac{\Omega^2 R^2}{4g} + \frac{H}{2}$ invece diminuisce.

- Per determinare la Ω_{max} , bisogna imporre la condizione $z_{free}(r = R) = H$.

$$z_{free}(R) = \frac{\Omega_{max}^2 R^2}{4g} + R^2 \frac{H}{2} = H \Rightarrow \Omega_{max} = \sqrt{\frac{2gH}{R^2}}$$

- Per ottenere il campo di pressione, basta inserire il il valore di C e Ω_{max} nella formula ([eqn:p]{reference-type=>ref> reference=>eqn:p}).

7.1 Teorema di Buckingham

Il teorema di Buckingham afferma che un problema descritto da n variabili fisiche, le cui dimensioni fisiche coinvolgono k grandezze fondamentali, può essere espresso in funzione di $n - k$ gruppi adimensionali.

7.2 Equazioni di Navier–Stokes incomprimibili in forma adimensionale

Nelle equazioni incomprimibili di Navier–Stokes per un fluido a densità costante

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases}$$

compaiono 7 variabili fisiche $(\rho, \mathbf{u}, \mu, p, \mathbf{g}; \mathbf{r}, t)$, le 2 variabili indipendenti spaziale \mathbf{r} e temporale t , e le 5 variabili dipendenti rappresentate dalla densità ρ , dal campo di velocità \mathbf{u} , dal coefficiente di viscosità dinamica μ , dal campo di pressione p e dal campo di forze di volume \mathbf{g} . Le dimensioni fisiche delle 7 variabili possono essere costruite con 3 grandezze fondamentali, la massa M , la lunghezza L e il tempo T . Ad esempio, le dimensioni fisiche della velocità sono $[\mathbf{u}] = L T^{-1}$ e quelle della densità sono $[\rho] = M L^{-3}$. Le dimensioni delle 7 variabili fisiche che compaiono nelle equazioni di Navier–Stokes incomprimibili sono raccolte nella tabella [tab:adim-ns-1]{reference-type=»ref» reference=»tab:adim-ns-1»}.

\mathbf{r}	t	ρ	\mathbf{u}	μ	p	\mathbf{g}
--------------	-----	--------	--------------	-------	-----	--------------

M 0 0 1 0 1 1 0 L 1 0 -3 1 -1 -1 1 T 0 1 0 -1 -1 -2 -2

: Variabili fisiche e grandezze fondamentali.[tab:adim-ns-1]

Per poter formare i $7 - 3 = 4$ gruppi adimensionali che caratterizzano il problema, è necessario scegliere 3 variabili fisiche (o combinazione di queste) che «contengano in maniera linearmente indipendente» tutte le 3 grandezze fondamentali del problema. Facendo riferimento alla tabella [tab:adim-ns-1]{reference-type=>ref} reference=>tab:adim-ns-1», le colonne relative alle variabili scelte per l'adimensionalizzazione devono formare dei vettori linearmente indipendenti tra di loro. Ad esempio, due scelte valide delle variabili da usare per l'adimensionalizzazione del problema sono:

- (ρ, U, L) , una densità, una velocità e una lunghezza di riferimento,
- (μ, U, L) , una viscosità, una velocità e una lunghezza di riferimento,

mentre una scelta non accettabile è una terna (T, U, L) formata da un tempo, una velocità e una lunghezza di riferimento, poichè non è possibile costruire dei gruppi adimensionali con le variabili fisiche che contengono la massa come grandezza fisica, come la densità, la pressione e il coefficiente di viscosità. Tutte le variabili fisiche vengono espresse come il prodotto di una loro grandezza di riferimento, che contiene le dimensioni fisiche e viene indicata con la tilde, e la loro versione adimensionale, indicata con l'asterisco,

$$\mathbf{r} = \tilde{L} \mathbf{r}^* \quad , \quad t = \tilde{T} t^* \quad , \quad \mathbf{u} = \tilde{U} \mathbf{u}^* \\ \rho = \tilde{\rho} \rho^* \quad , \quad \mu = \tilde{\mu} \mu^* \quad , \quad p = \tilde{p} p^* \quad , \quad \mathbf{g} = \tilde{g} \mathbf{g}^* .$$

Per le equazioni di Navier–Stokes incompressibili a proprietà costanti, è possibile scegliere il valore di riferimento della densità e della viscosità dinamica come il valore stesso delle variabili fisiche, $\tilde{\rho} = \rho$, $\tilde{\mu} = \mu$. In questo modo, il loro valore adimensionale è uguale a 1, $\rho^* = \mu^* = 1$. Nel caso del campo di forze di volume dovuto alla gravità, costante e diretto lungo la verticale, è possibile definire il valore di riferimento $\tilde{g} = |\mathbf{g}|$, cosicchè il vettore \mathbf{g}^* è uguale e contrario al versore $\hat{\mathbf{z}}$ orientato in direzione verticale. Anche l'operatore *nabla* viene adimensionalizzato, $\nabla = \frac{1}{\tilde{L}} \nabla^*$. Le equazioni di Navier–Stokes possono essere scritte come

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho \tilde{U}}{\tilde{t}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho \tilde{U}^2}{\tilde{L}} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \frac{\mu \tilde{U}}{\tilde{L}^2} \Delta^* \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{p}}{\tilde{L}} \nabla^* p^* = -\rho \tilde{g} \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\tilde{U}}{\tilde{L}} \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 . \end{array} \right.$$

7.3 Adimensionalizzazione «ad alti numeri di Reynolds»

Se si scelgono $(\tilde{\rho}, \tilde{U}, \tilde{L})$ come grandezze di riferimento, dividendo l'equazione della quantità di moto per $\tilde{\rho} \tilde{U}^2 / \tilde{L}$ e il vincolo di incomprimibilità per \tilde{U} / \tilde{L} ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{L}}{\tilde{U} \tilde{t}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \frac{\mu}{\rho \tilde{U} \tilde{L}} \Delta^* \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{p}}{\rho \tilde{U}^2} \nabla^* p^* = -\frac{g \tilde{L}}{\tilde{U}^2} \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 , \end{array} \right.$$

si possono riconoscere 4 numeri adimensionali:

- il numero di Strouhal, $St = \frac{\tilde{L}}{\tilde{U} \tilde{t}}$, che rappresenta il rapporto tra una scala dei tempi e la scala dei tempi \tilde{L} / \tilde{U} costruita con la lunghezza e la velocità di riferimento;
- il numero di Reynolds, $Re = \frac{\rho \tilde{U} \tilde{L}}{\mu}$, che rappresenta il rapporto tra gli effetti di inerzia e quelli viscosi;
- il numero di Eulero, $Eu = \frac{\tilde{p}}{\rho \tilde{U}^2}$, che rappresenta il rapporto tra la grandezza di riferimento della pressione e quella di un'energia cinetica del fluido;
- il numero di Froude, $Fr = \frac{\tilde{U}^2}{g \tilde{L}}$, che rappresenta il rapporto tra gli effetti di inerzia e quelli dovuti al campo di forze di volume.

Quando non esiste una scala dei tempi «indipendente» dal fenomeno fluidodinamico, è possibile scegliere il valore di riferimento del tempo $\tilde{t} = \tilde{L} / \tilde{U}$, in modo tale da ottenere un numero di Strouhal unitario. Per la natura stessa della

«pressione» di moltiplicatore di Lagrange introdotto nelle equazioni di Navier–Stokes per imporre il vincolo di incomprimibilità, è frequente che la pressione non abbia una scala indipendente nel regime incomprimibile. È possibile quindi scegliere una scala di pressione $\tilde{p} = \rho \tilde{U}^2$, in modo tale da ottenere un numero di Eulero unitario,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \frac{1}{Re} \Delta^* \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* = -\frac{1}{Fr} \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0. \end{cases}$$

Se le grandezze di riferimento sono rappresentative del problema, in modo tale da rendere gli ordini di grandezza delle variabili adimensionali paragonabili tra loro, il valore dei numeri adimensionali permette di valutare l'influenza dei termini. Ad esempio, per valori elevati del numero di Froude l'influenza delle forze di volume è ridotta. Per valori elevati del numero di Reynolds, l'influenza degli effetti viscosi diventa trascurabile nelle regioni del campo di moto nelle quali le derivate spaziali del campo di velocità sono piccole. Per applicazioni tipiche aeronautiche ad alti numeri di Reynolds, gli effetti viscosi saranno quindi trascurabili in gran parte del dominio, ad eccezione delle regioni di strato limite, all'interno delle quali la componente della velocità «parallela» alla parete ha una variazione elevata in direzione perpendicolare alla parete stessa. Se gli effetti delle forze di volume sono trascurabili ($Fr \rightarrow \infty$), le equazioni di Navier–Stokes incomprimibili per problemi ad alti numeri di Reynolds ($Re \rightarrow \infty$) si riducono alle equazioni di Eulero incomprimibili nelle regioni del dominio in cui gli effetti viscosi sono trascurabili,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* = \mathbf{0} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0. \end{cases}$$

7.4 Adimensionalizzazione «a bassi numeri di Reynolds»

Se si scelgono $(\tilde{\rho}, \tilde{U}, \tilde{L})$ come grandezze di riferimento, dividendo l'equazione della quantità di moto per $\tilde{\mu} \tilde{U} / \tilde{L}^2$ e il vincolo di incomprimibilità per \tilde{U} / \tilde{L} , le equazioni di Navier–Stokes diventano

$$\begin{cases} \frac{\rho \tilde{L}^2}{\tilde{\mu} \tilde{t}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho \tilde{U} \tilde{L}}{\mu} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \Delta^* \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{p} \tilde{L}}{\mu \tilde{U}} \nabla^* p^* = -\frac{\rho g \tilde{L}^2}{\mu \tilde{U}} \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0. \end{cases}$$

Se gli effetti delle forze di volume sono trascurabili rispetto agli effetti viscosi e non ci sono scale indipendenti di tempo e pressione, le equazioni di Navier–Stokes in forma adimensionale diventano

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + Re (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \Delta^* \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* = \mathbf{0} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0. \end{cases}$$

Per correnti nelle quali il numero di Reynolds caratteristico tende a zero, note come *creeping flow*, il termine non lineare diventa trascurabile e le equazioni di Navier–Stokes si riducono alle equazioni di Stokes,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} - \Delta^* \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* = \mathbf{0} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0. \end{cases}$$

7.5 Equazione di continuità e numero di Mach

La forma adimensionale dell'equazione di continuità permette di valutare i limiti dell'approssimazione di corrente incomprimibile, che soddisfa il vincolo cinematico di incomprimibilità $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. L'equazione della massa viene scritta in forma convettiva,

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}.$$

Ricordando che lo stato termodinamico di un sistema monocomponente monofase è definito da due variabili termodinamiche, il campo di pressione p viene espresso in funzione del campo di densità ρ e di entropia s , come $p(\rho, s)$. Il differenziale di questa relazione,

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho ds,$$

può essere utilizzato per esprimere la derivata materiale della densità in funzione delle derivate materiali di pressione ed entropia,

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s} \frac{Dp}{Dt} - \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho}{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s} \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{c^2} \frac{Dp}{Dt} - \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho}{c^2} \frac{Ds}{Dt},$$

avendo riconosciuto il quadrato della velocità del suono $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$. L'equazione della massa diventa quindi

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{Dp}{Dt} - \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho}{\rho c^2} \frac{Ds}{Dt}.$$

Per processi isentropici (o per i quali il secondo termine a destra dell'uguale è trascurabile), l'equazione della massa si riduce a

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{Dp}{Dt}.$$

Utilizzando i valori di densità $\tilde{\rho}$, velocità \tilde{U} e lunghezza \tilde{L} caratteristici della corrente per costruire la scala dei tempi $\tilde{t} = \tilde{L}/\tilde{U}$ e per la pressione $\tilde{p} = \tilde{\rho}\tilde{U}^2$, si ottiene l'equazione della massa in forma adimensionale,

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = -\frac{M^2}{\rho^*} \frac{Dp^*}{Dt^*},$$

nella quale si è iconosciuto il numero di Mach caratteristico della corrente, $M = \frac{\tilde{U}}{c}$, definito come il rapporto tra una velocità caratteristica e la velocità del suono in uno stato termodinamico di riferimento della corrente. È immediato osservare che l'equazione di continuità della massa si riduce al vincolo di incomprimibilità quando il numero di Mach assume valori ridotti (e il campo di pressione non ha variazioni rapide).

7.6 Equazioni di Navier–Stokes in sistemi di riferimento non inerziali

...

7.7 Equazioni di Boussinesq e numeri di Prandtl, Rayleigh e Grashof

7.8 Equazioni di Boussinesq

Le equazioni di Boussinesq sono un modello approssimato delle equazioni complete del moto dei fluidi, ricavato sotto le ipotesi che:

- il contributo di dissipazione nell'equazione dell'energia sia trascurabile;
- la densità dipenda linearmente dalla temperatura nel termine di forze di volume nell'equazione della quantità di moto.

La variazione della densità in funzione della densità diventa quindi

$$d\rho(P, T) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P dT \approx \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P dT = -\rho_0 \alpha dT \xrightarrow{\text{endsplit}} \rho = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0)) ,$$

dove le derivate sono calcolate nello stato termodinamico di riferimento, (ρ_0, T_0) , ed è stato introdotto il coefficiente di dilatazione termica

$$\alpha = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P .$$

Introducendo le approssimazioni elencate, l'espressione dell'energia interna $e = c_v T$ e la legge di Fourier per il flusso di calore per conduzione, $\mathbf{q} = -k\nabla T$, nelle equazioni complete per una corrente incomprimibile di un fluido newtoniano,

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla P = \rho \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla e = 2\mu \mathbb{D} : \mathbb{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} , \end{cases}$$

si ottengono le equazioni di Boussinesq

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P = (1 - \alpha(T - T_0)) \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = D \nabla^2 T , \end{cases}$$

avendo definito il coefficiente di diffusione termica $D = \frac{k}{\rho_0 c_v}$.

7.9 Equazioni di Boussinesq: problema bidimensionale tra due superfici piane

7.9.1 Condizioni al contorno

Si considera ora la corrente che si sviluppa tra due superfici piane orizzontali infinite, a distanza h l'una dall'altra, mantenute a temperatura costante: la temperatura vale T_w sulla superficie inferiore e T_c sulla superficie superiore. Viene definita la differenza di temperatura $\Delta T = T_w - T_c$. Se le due superfici considerate sono superfici solide, la velocità su di esse è nulla. Se le due superfici sono superfici «libere» (di simmetria, a sforzo nullo) si annulla la derivata normale della velocità.

Prendendo un sistema di assi ortogonali, con l'origine in corrispondenza della superficie inferiore, con l'asse x parallelo e l'asse z perpendicolare alla superficie, si possono riassumere così le condizioni al contorno,

$$\text{wall: } \begin{cases} T(x, z = 0) = T_w \\ T(x, z = h) = T_c \\ \mathbf{u}(x, z = 0) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}(x, z = h) = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{free: } \begin{cases} T(x, z = 0) = T_w, \quad T(x, z = h) = T_c \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x, z = 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, z = h) = 0 \\ w(x, z = 0) = 0, \quad w(x, z = h) = 0. \end{cases}$$

Non ci sono condizioni al contorno in x , poichè la direzione è omogenea. Considereremo qui solo il problema con le condizioni al contorno «free».

7.9.2 Soluzione stazionaria non convettiva

Esiste una soluzione stazionaria ($\partial/\partial t = 0$) del problema con fluido in quiete ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$). Il vincolo di incomprimibilità è soddisfatto identicamente. Sfruttando l'omogeneità della direzione x , la soluzione stazionaria indipendente dalla coordinata x soddisfa le equazioni

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_0} \frac{dP}{dz} = \alpha g(T - T_0) \\ \frac{d^2 T}{dz^2} = 0, \end{cases}$$

dotate delle opportune condizioni al contorno. La soluzione stazionaria del problema è

$$\begin{cases} \bar{T}(z) = T_w + (T_c - T_w) \frac{z}{h} = T_w - \Delta T \frac{z}{h} \\ \bar{P}(z) = P_w + \alpha \rho_0 g \left[(T_w - T_0)z - \frac{1}{2} \Delta T \frac{z^2}{h} \right], \end{cases}$$

avendo indicato con P_w il valore della pressione in corrispondenza della superficie inferiore a $z = 0$.

7.9.3 Equazione delle fluttuazioni

Viene definita la fluttuazione di temperatura $\tau(x, z)$,

$$\begin{aligned} \tau(x, z) &= T(x, z) - \bar{T}(z) = T(x, z) - T_w + \Delta T \frac{z}{h} \\ &\rightarrow T(x, z) - T_w = \tau(x, z) - \Delta T \frac{z}{h}. \end{aligned}$$

Scegliendo la superficie inferiore a $z = 0$ per definire la condizione termodinamica di riferimento, $T_0 = T_w$. le equazioni di Boussinesq diventano

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P = \left(1 - \alpha \tau + \Delta T \frac{z}{h} \right) \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau + w \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = D \nabla^2 \tau. \end{cases}$$

Inoltre è possibile raccogliere il primo e il terzo termine delle forze di galleggiamento sotto lo stesso operatore di gradiente che opera sul campo di pressione. Infatti, è possibile scrivere il termine di galleggiamento come

$$\left(1 - \alpha \tau + \Delta T \frac{z}{h} \right) \mathbf{g} = \alpha \tau g \hat{\mathbf{z}} - \nabla \left(gz + \Delta T \frac{z^2}{2h} \right).$$

Definendo una «pressione generalizzata» P' ,

$$P' = P + \rho_0 g z + \rho_0 \Delta T \frac{z^2}{2h},$$

le equazioni di Boussinesq diventano

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P' = \alpha g \tau \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau - \frac{\Delta T}{h} w = D \nabla^2 \tau, \end{cases}$$

e le condizioni al contorno della temperatura vengono espresse anch'esse in funzione di τ ,

$$\tau(x, z = 0) = \tau(x, z = h) = 0.$$

7.10 Equazioni di Boussinesq in forma adimensionale

Si ricava la forma adimensionale delle equazioni ([eqn:Bouss-tau]{reference-type=>ref} reference=>eqn:Bouss-tau}) e delle condizioni al contorno ([eqn:Bouss-tau-bc]{reference-type=>ref} reference=>eqn:Bouss-tau-bc}) utilizzando il teorema π di Buckingham. Nel problema di Boussinesq compaiono 12 grandezze dimensionali (13 se si volesse considerare la componente w della velocità \mathbf{u} in maniera indipendente),

$$\underbrace{\mathbf{x}, t}_{\text{tar. indep.}} , \underbrace{\mathbf{u}, \tau, P'}_{\text{campi } f(\mathbf{x}, t)} , \underbrace{\rho_0, \nu, D, \alpha, g}_{\text{ propr. del fluido e del problema}} , \underbrace{h, \Delta T}_{\text{ dominio e condizioni al contorno}} ,$$

e 4 grandezze fisiche fondamentali: massa M , lunghezza L , tempo T e temperatura Θ . Secondo il teorema di Buckingham, il problema può quindi essere caratterizzato da 8 numeri adimensionali. Utilizzando la stessa scala di lunghezze per adimensionalizzare \mathbf{x} e h e la stessa scala di temperature per adimensionalizzare τ e ΔT , sono sufficienti 6 numeri adimensionali. È necessario scegliere 4 grandezze fisiche di riferimento indipendenti e, possibilmente, rappresentative del problema con le quali adimensionalizzare le altre. Il problema della convezione non forzata descritto dalle equazioni di Boussinesq è caratterizzato dalla differenza di temperatura ΔT e dalla distanza h delle superfici, dal fluido considerato e dall'intensità delle forze di volume. I campi di velocità \mathbf{u} , di «temperatura» τ e di «pressione» P' sono un risultato, una conseguenza, delle condizioni al contorno e del fluido impiegato: non esistono scale di velocità e pressione indipendenti, mentre il campo di temperatura può essere scalato sulla differenza ΔT . Non esiste nemmeno una scala indipendente dei tempi, poiché l'evoluzione del sistema è determinata dalle condizioni al contorno e dal fluido utilizzato. Come grandezze dimensionali di riferimento indipendenti e caratteristiche del problema vengono scelte la densità del fluido, il coefficiente di diffusione termica, la distanza tra le superfici e la loro differenza di temperatura:

$$\tilde{\rho} = \rho_0, \tilde{D} = D, \tilde{L} = h, \tilde{\Theta} = \Delta T.$$

	\mathbf{x}	t	\mathbf{u}	τ	P'	ρ_0	ν	D	⋮
→	α	g	h	ΔT					

M					1	1			⋮
L		1		1	-1	-3	2	2	⋮
→	1	1							
T			1	-1	-2		-1	-1	⋮
→	-2								

Θ 1-11

: Teorema di Buckingham. Grandezze dimensionali e unità fisiche. [label=>tab:Bouss-pi-thm]

Ora è possibile scrivere ogni grandezza dimensionale come prodotto di una grandezza omogenea di riferimento (dimensionale) e del suo valore adimensionale. Si può quindi scrivere,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \tilde{L}\mathbf{x}^* \quad , \quad t = \tilde{T}t^* \\ \mathbf{u} &= \tilde{U}\mathbf{u}^* \quad , \quad \tau = \tilde{\Theta}\tau^* \quad , \quad P' = \tilde{P}P'^* \\ \rho_0 &= \tilde{\rho}\rho_0^* \quad , \quad \nu = \tilde{\nu}\nu^* \quad , \quad D = \tilde{D}D^* \quad , \quad \alpha = \tilde{\alpha}\alpha^* \quad , \quad g = \tilde{g}g^* \\ h &= \tilde{L}h^* \quad , \quad \Delta T = \tilde{\Theta}\Delta T^* \end{aligned}$$

avendo utilizzato la stessa scala di lunghezza \tilde{L} come riferimento per la coordinata spaziale indipendente \mathbf{x} e la distanza h tra le due superfici, e la stessa scala di temperatura $\tilde{\Theta}$ come riferimento per il campo di temperatura τ e la differenza di temperatura tra le due superfici ΔT , come anticipato in precedenza. Le 12 grandezze dimensionali sono state adimensionalizzate usando 10 scale di riferimento: da queste è possibile ricavare 6 numeri adimensionali con cui descrivere il problema. Inserendo le espressioni ([eqn:var-adim] reference-type=>ref reference=>eqn:var-adim») nel problema di Boussinesq ([eqn:Bouss-tau] reference-type=>ref reference=>eqn:Bouss-tau»), si ricava

$$\begin{cases} \frac{\tilde{U}}{\tilde{T}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\tilde{U}^2}{\tilde{L}} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \frac{\tilde{\nu}\tilde{U}}{\tilde{L}^2} \nu^* \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}\tilde{L}} \frac{1}{\rho_0^*} \nabla P'^* = \tilde{\alpha}\tilde{g}\tilde{\theta}\alpha^* g^* \tau^* \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\tilde{U}}{\tilde{L}} \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \\ \frac{\tilde{\Theta}}{\tilde{T}} \frac{\partial \tau^*}{\partial t^*} + \frac{\tilde{U}\tilde{\Theta}}{\tilde{L}} \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \tau^* - \frac{\tilde{U}\tilde{\Theta}}{\tilde{L}} \frac{\Delta T^*}{h^*} w^* = \frac{\tilde{D}\tilde{\Theta}}{\tilde{L}^2} D^* \nabla^{*2} \tau^* \end{cases}$$

con le conzioni al contorno "free"

$$\text{free:} \begin{cases} \tilde{\Theta}\tau^*(\tilde{L}x^*, \tilde{L}z^* = 0) = 0 \quad , \quad \tilde{\Theta}\tau^*(\tilde{L}x^*, \tilde{L}z^* = \tilde{L}h^*) = 0 \\ \frac{\tilde{U}}{\tilde{L}} \frac{\partial u^*}{\partial z^*}(\tilde{L}x^*, \tilde{L}z^* = 0) = 0 \quad , \quad \frac{\tilde{U}}{\tilde{L}} \frac{\partial u^*}{\partial z^*}(\tilde{L}x^*, \tilde{L}z^* = \tilde{L}h^*) = 0 \\ \tilde{U}w^*(\tilde{L}x^*, \tilde{L}z^* = 0) = 0 \quad , \quad \tilde{U}w^*(\tilde{L}x^*, \tilde{L}z^* = \tilde{L}h^*) = 0 \end{cases}$$

Con un abuso di notazione, d'ora in poi si

indicano le grandezze adimensionali senza asterisco e i campi adimensionali vengono definiti come funzione delle variabili indipendenti adimensionali,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{U}\mathbf{u}^*(\tilde{L}\mathbf{x}^*, \tilde{T}t^*) \quad \rightarrow \quad \tilde{U}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) .$$

Le grandezze di riferimento delle grandezze costanti vengono scelte coincidenti con la grandezza stessa, cosicché le grandezze adimensionali relative sono uguali a 1,

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \tilde{\rho} \quad , \quad \nu = \tilde{\nu} \quad , \quad D = \tilde{D} \quad , \quad \alpha = \tilde{\alpha} \quad , \quad g = \tilde{g} \\ h &= \tilde{L} \quad , \quad \Delta T = \tilde{\Theta} . \end{aligned}$$

Dividendo l'equazione della quantità di moto per $\tilde{\nu}\tilde{U}/\tilde{L}^2$, il vincolo di incomprimibilità per \tilde{U}/\tilde{L} e l'equazione dell'energia per $\tilde{D}\tilde{\Theta}/\tilde{L}^2$, il problema di Boussinesq diventa

$$\begin{cases} \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{T}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\tilde{U}\tilde{L}}{\tilde{\nu}} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{P}\tilde{L}}{\tilde{\rho}\tilde{\nu}\tilde{U}} \nabla P'^* = \frac{\tilde{\alpha}\tilde{g}\tilde{\Theta}\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{U}} \tau^* \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \\ \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{D}\tilde{T}} \frac{\partial \tau^*}{\partial t^*} + \frac{\tilde{U}\tilde{L}}{\tilde{D}} \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \tau^* - \frac{\tilde{U}\tilde{L}}{\tilde{D}} w^* = \nabla^{*2} \tau^* \end{cases}$$

con le conzioni al contorno «free»

$$\text{free: } \begin{cases} \tau^*(x^*, z^* = 0) = 0 & , & \tau^*(x^*, z^* = 1) = 0 \\ \frac{\partial u^*}{\partial z^*}(x^*, z^* = 0) = 0 & , & \frac{\partial u^*}{\partial z^*}(x^*, z^* = 1) = 0 \\ w^*(x^*, z^* = 0) = 0 & , & w^*(x^*, z^* = 1) = 0 . \end{cases}$$

Nel problema ([eqn:Bouss-tau-adim-2]{reference-type=>ref} reference=>eqn:Bouss-tau-adim-2»)-[eqn:Bouss-adim-2-bc]{reference-type=>ref} reference=>eqn:Bouss-adim-2-bc») compaiono 6 numeri adimensionali. Siamo arrivati al risultato previsto dal teorema di Buckingham. Prima di andare avanti, conviene comunque fare un'osservazione. Solo 5 dei 6 numeri adimensionali trovati sono tra di loro indipendenti: in particolare solo 3 dei 4 numeri adimensionali

$$\pi_1 = \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{D}\tilde{T}}, \quad \pi_2 = \frac{\tilde{U}\tilde{L}}{\tilde{D}}, \quad \pi_3 = \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{T}}, \quad \hat{\pi}_4 = \frac{\tilde{U}\tilde{L}}{\tilde{\nu}} = \pi_2 \frac{\pi_3}{\pi_1}$$

sono linearmente indipendenti. Sembra di aver commesso un errore poiché abbiamo trovato una contraddizione del teorema di Buckingham. L'apparente errore si nasconde nel termine adimensionale $\frac{\tilde{\alpha}\tilde{g}\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{U}}$. Questo termine infatti è il prodotto dei numeri adimensionali $\tilde{\alpha}\tilde{\theta}$ e $\frac{\tilde{g}\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{U}}$. I sei numeri adimensionali indipendenti che caratterizzano il problema sono quindi

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{D}\tilde{T}}, & \pi_2 &= \frac{\tilde{U}\tilde{L}}{\tilde{D}}, & \pi_3 &= \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{T}} \\ \pi_4 &= \frac{\tilde{P}\tilde{L}}{\tilde{\rho}\tilde{\nu}\tilde{U}}, & \pi_5 &= \tilde{\alpha}\tilde{\theta}, & \pi_6 &= \frac{\tilde{g}\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{U}} . \end{aligned}$$

Poiché il coefficiente di dilatazione termica α e la forza per unità di volume g compaiono sempre attraverso il loro prodotto, questo si può considerare come un'unica variabile, αg . In questo caso, i 5 numeri adimensionali che descrivono il problema composto dalle 9 (10-1) scale di riferimento sono

$$\pi'_1 = \pi_1, \quad \pi'_2 = \pi_2, \quad \pi'_3 = \pi_3, \quad \pi'_4 = \pi_4, \quad \pi'_5 = \pi_5\pi_6 .$$

Non essendoci scale di velocità, tempo e pressione indipendenti, è possibile definire queste scale a partire dalle 4 grandezze fisiche di riferimento \tilde{L} , $\tilde{\Delta T}$, $\tilde{\rho}$, \tilde{D} , imponendo il valore unitario di alcuni parametri adimensionali,

$$\begin{aligned} \pi'_1 = 1 &\quad \rightarrow \quad \tilde{T} = \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{D}} \\ \pi'_2 = 1 &\quad \rightarrow \quad \tilde{U} = \frac{\tilde{D}}{\tilde{L}} \\ \pi'_4 = 1 &\quad \rightarrow \quad \tilde{P} = \frac{\tilde{\rho}\tilde{\nu}\tilde{U}}{\tilde{L}} . \end{aligned}$$

Gli unici due parametri adimensionali caratteristici del problema rimangono

$$\begin{aligned} \Pi_1 = \pi'_3 &= \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{L}^2/\tilde{D}} \quad \rightarrow \quad \Pi_1 = \frac{\tilde{D}}{\tilde{\nu}} = \frac{1}{Pr} \\ \Pi_5 = \pi'_5 &= \frac{\tilde{\alpha}\tilde{g}\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{D}/\tilde{L}} \quad \rightarrow \quad \Pi_5 = \frac{\tilde{\alpha}\tilde{g}\tilde{\theta}\tilde{L}^3}{\tilde{\nu}\tilde{D}} = Ra = \\ &= \frac{\tilde{\alpha}\tilde{g}\tilde{\theta}\tilde{L}^3}{\tilde{\nu}^2} \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{D}} = Gr Pr , \end{aligned}$$

nei quali si possono riconoscere i numeri di Prandtl, Pr , di Rayleigh, Ra , e di Grashof, Gr . La forma adimensionale del problema di Boussinesq tra due superfici piane è quindi

$$\begin{cases} \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] - \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla P' = Ra \tau \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau - w = \nabla^2 \tau , \end{cases}$$

con le conzioni al contorno «free»

$$\text{free: } \begin{cases} \tau(x, z = 0) = 0 & , & \tau(x, z = 1) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x, z = 0) = 0 & , & \frac{\partial u}{\partial z}(x, z = 1) = 0 \\ w(x, z = 0) = 0 & , & w(x, z = 1) = 0 . \end{cases}$$

7.11 Equazione della vorticità e funzione di corrente nell'approssimazione di Boussinesq

Dall'equazione della quantità di moto in ([eqn:Bouss-tau-adim-3]{reference-type=>ref} reference=>eqn:Bouss-tau-adim-3») è possibile ricavare l'equazione della vorticità, applicandole l'operatore di rotore. Poichè il problema è piano e bidimensionale, il campo di vorticità ha componente non nulla solo fuori dal piano xz . Utilizzando un sistema di coordinate cartesiano, il campo di vorticità

$$\boldsymbol{\omega}(x, z, t) = \xi(x, z, t)\hat{\mathbf{y}} \text{ soddisfa l'equazione } \$ \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi \right] - \nabla^2 \xi = -Ra \frac{\partial \tau}{\partial x} . \$$$

Si può poi introdurre la funzione di corrente ψ ,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad , \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad ,$$

in modo tale da soddisfare identicamente il vincolo di incomprimibilità. La componente y del campo di vorticità diventa

$$\xi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \nabla^2 \psi \quad ,$$

e il termine advettivo di una funzione f qualsiasi può essere scritta come un determinante,

$$\mathbf{u} \cdot \nabla f = u \frac{\partial f}{\partial x} + w \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} = \begin{vmatrix} f_x & f_z \\ \psi_x & \psi_z \end{vmatrix} =: \frac{\partial(f, \psi)}{\partial(x, z)} .$$

Il sistema di equazioni del problema di Boussinesq diventa quindi

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial(\xi, \psi)}{\partial(x, z)} = Pr \nabla^2 \xi - Pr Ra \frac{\partial \tau}{\partial x} \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial(\tau, \psi)}{\partial(x, z)} = \nabla^2 \tau + w . \end{cases}$$

7.12 Approssimazione di Fourier–Galerkin del problema di Boussinesq

Utilizzando la geometria del dominio, è possibile espandere le funzioni che compaiono nelle equazioni ([eqn:Bouss-vort-psi-tau]{reference-type=>ref} reference=>eqn:Bouss-vort-psi-tau») come somma di prodotti di funzioni armoniche in x e z , la cui ampiezza dipende dal tempo

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= \sum_m \sum_k a_{m,k}(t) \sin(m\pi z + \phi_m^a) \sin(k\pi x + \phi_k^a) \\ \tau(x, z, t) &= \sum_m \sum_k b_{m,k}(t) \sin(m\pi z + \phi_m^b) \sin(k\pi x + \phi_k^b) . \end{aligned}$$

Le condizioni al contorno ([eqn:Bouss-adim-3-bc]{reference-type=>ref} reference=>eqn:Bouss-adim-3-bc») del problema con due superfici infinite «free» impongono che la componente $w = -\partial\psi/\partial x$ e la derivata $\partial u/\partial z = \partial^2\psi/\partial z^2$

siano nulle per $z = 0, 1$ per ogni istante temporale e per ogni valore di x . Le condizioni al contorno su w impongono le seguenti condizioni sull'espansione armonica delle funzioni,

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{z=0} = \sum_m \sum_k k \pi a_{m,k}(t) \sin \phi_m^a \cos(k\pi x + \phi_k^a) \rightarrow \phi_m^a = 0,$$

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{z=1} = \sum_m \sum_k k \pi a_{m,k}(t) \sin m\pi \cos(k\pi x + \phi_k^a) \rightarrow m \in \mathbb{Z}.$$

Le stesse condizioni derivano dalle condizioni al contorno su $\partial u / \partial z$. Le condizioni al contorno sulla temperatura in impongono le seguenti condizioni sull'espansione armonica della funzione τ

$$0 = \tau \Big|_{z=0} = \sum_m \sum_k b_{m,k}(t) \sin \phi_m^b \sin(k\pi x + \phi_k^b) \rightarrow \phi_m^b = 0,$$

$$0 = \tau \Big|_{z=1} = \sum_m \sum_k b_{m,k}(t) \sin m\pi \sin(k\pi x + \phi_k^b) \rightarrow m \in \mathbb{Z}.$$

A causa dell'omogeneità della direzione x , nella quale il dominio è infinito, non ci sono condizioni sul numero d'onda k , che può assumere tutti i valori in \mathbb{R} , e sulla fase delle armoniche in x . Le espansioni ([eqn:harm-1]{reference-type=»ref» reference=»eqn:harm-1»}) possono quindi essere scritte come

$$\psi(x, z, t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_k a_{m,k}^1(t) \sin(m\pi z) \sin(k\pi x) + a_{m,k}^2(t) \sin(m\pi z) \cos(k\pi x)$$

$$\tau(x, z, t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_k b_{m,k}^1(t) \sin(m\pi z) \sin(k\pi x) + b_{m,k}^2(t) \sin(m\pi z) \cos(k\pi x).$$

7.13 Dal problema di Boussinesq al modello di Lorenz

Le espansioni ([eqn:harm-2]{reference-type=»ref» reference=»eqn:harm-2»}) possono essere *brutalmente* troncate per ottenere un modello dinamico di dimensione $N_d = 3$ partendo dal modello continuo, che ha dimensione infinita. Le espansioni ([eqn:harm-2]{reference-type=»ref» reference=»eqn:harm-2»}) vengono troncate mantenendo solo 3 termini

$$\psi(x, z, t) = a(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x)$$

$$\tau(x, z, t) = b(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x) + c(t) \sin(2\pi z),$$

avendo definito $a(t) = a_{1,k}^1(t)$, $b(t) = b_{1,k}^2(t)$, $c(t) = b_{2,0}^1(t)$. Usando le espansioni ([eqn:harm-3]{reference-type=»ref» reference=»eqn:harm-3»}), la componente y del campo di vorticità $\xi = \nabla^2 \psi$ diventa

$$\xi = -\pi^2(1 + k^2)\psi = -\pi^2(1 + k^2)a(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x)$$

I due determinanti che compaiono nelle equazioni ([eqn:Bouss-vort-psi-tau]{reference-type=»ref» reference=»eqn:Bouss-vort-psi-tau»}) valgono

$$\frac{\partial(\xi, \psi)}{\partial(x, z)} = [-\pi^3 k(1 + k^2)a(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x)] [a(t)\pi \cos(\pi z) \sin(k\pi x)] +$$

$$- [-\pi^3(1 + k^2)a(t) \cos(\pi z) \sin(k\pi x)] [a(t)\pi k \sin(\pi z) \cos(k\pi x)] = 0,$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\tau, \psi)}{\partial(x, z)} &= [-\pi k b(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x)] [a(t) \pi \cos(\pi z) \sin(k\pi x)] + \\ &\quad - [\pi b(t) \cos(\pi z) \cos(k\pi x) + 2\pi c(t) \cos(2\pi z)] [a(t) \pi k \sin(\pi z) \cos(k\pi x)] = \\ &= -k\pi^2 a(t) b(t) \frac{\sin(2\pi z)}{2} - 2k\pi^2 a(t) c(t) \sin(\pi z) \cos(2\pi z) \cos(k\pi x). \end{aligned}$$

I laplaciani che compaiono nelle equazioni ([eqn:Bouss-vort-psi-tau]{reference-type=>ref} reference=>eqn:Bouss-vort-psi-tau}) valgono

$$\nabla^2 \xi = -\pi^2(1 + k^2)\xi = \pi^4(1 + k^2)^2 a(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x),$$

e

$$\nabla^2 \tau = -\pi^2(1 + k^2)b(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x) - 4\pi^2 c(t) \sin(2\pi x).$$

Il numero di Prantl viene indicato come $Pr = \sigma$, il numero di Rayleigh come $Ra = R$. Inserendo le espansioni ([eqn:harm-3]{reference-type=>ref} reference=>eqn:harm-3}) all'interno delle equazioni ([eqn:Bouss-vort-psi-tau]{reference-type=>ref} reference=>eqn:Bouss-vort-psi-tau}), il problema troncato di Boussinesq diventa,

$$\left\{ \begin{aligned} -\sigma\pi^2(1 + k^2)\dot{a}(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x) &= \sigma\pi^4(1 + k^2)^2 a(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x) + \\ &\quad + \sigma R \pi k b(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x) \\ \dot{b}(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x) + \dot{c}(t) \sin(2\pi x) + \\ &\quad - k\pi^2 a(t) b(t) \frac{\sin(2\pi z)}{2} - 2k\pi^2 a(t) c(t) \sin(\pi z) \cos(2\pi z) \cos(k\pi x) = \\ &= -\pi^2(1 + k^2)b(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x) - 4\pi^2 c(t) \sin(2\pi x) + \\ &\quad - \pi k a(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x). \end{aligned} \right.$$

Raccogliendo il termine $\sin(\pi z) \sin(k\pi x)$ nell'equazione della vorticità si ottiene l'equazione

$$-\pi^2(1 + k^2)\dot{a} = \sigma\pi^4(1 + k^2)^2 a(t) + \sigma R \pi k b(t).$$

L'equazione della temperatura viene «proiettata» sulle funzioni di base $\sin(\pi z) \cos(k\pi x)$ e $\sin(2\pi x)$ e sfruttando l'ortogonalità delle funzioni armoniche. La proiezione consiste nella moltiplicazione dell'equazione per le funzioni di base $\sin(\pi z) \cos(k\pi x)$ e nell'integrazione in $(x, z) \in [0, \frac{2}{k}] \times [0, 1]$. Usando il valore degli integrali,

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{2/k} \sin(k\pi x)^2 dx &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{2/k} [1 - \cos(2k\pi x)] dx = \frac{1}{k} \\ \int_{x=0}^{2/k} \sin(k\pi x) \cos(k\pi x) dx &= \frac{1}{k\pi} \int_{x=0}^{2/k} \sin(k\pi x) d(\sin(k\pi x)) = 0 \\ \int_{x=0}^{2/k} \cos(k\pi x)^2 dx &= \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

e degli integrali

$$\begin{aligned} \int_{z=0}^1 \sin(\pi z)^2 dz &= \frac{1}{2} \int_{z=0}^1 [1 - \cos(2\pi z)] dz = \frac{1}{2} \\ \int_{z=0}^1 \sin(\pi z) \sin(\pi z) \cos(2\pi z) dz &= \frac{1}{2} \int_{z=0}^1 [1 - \cos(2\pi z)] \cos(2\pi z) dz = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{z=0}^1 \cos^2(2\pi z) dz = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

La proiezione dell'equazione della vorticità sulla funzione $\sin(\pi z) \cos(k\pi x)$ è

$$\frac{1}{2}\dot{b}(t) - \frac{1}{4}2k\pi^2 a(t)c(t) = -\frac{1}{2}\pi^2(1+k^2)b(t) - \frac{1}{2}\pi k a(t),$$

mentre la proiezione dell'equazione della vorticità sulla funzione $\sin(2\pi z)$ è

$$\frac{1}{k}\dot{c}(t) - \frac{1}{k}\frac{\pi^2 k}{2}a(t)b(t) = -\frac{1}{k}4\pi^2 c(t).$$

Le equazioni diventano quindi

$$\begin{cases} -\pi^2(1+k^2)\dot{a} = \sigma\pi^4(1+k^2)^2 a(t) + \sigma R \pi k b(t) \\ \dot{b} = -\pi^2(1+k^2)b(t) + \pi^2 k a(t)c(t) - \pi k a(t) \\ \dot{c} = \frac{\pi^2 k}{2}a(t)b(t) - 4\pi^2 c(t). \end{cases}$$

Partendo da queste equazioni, si introduce qualche cambio di variabile per riportarsi all'espressione classica del sistema di Lorenz. Viene introdotto il tempo $t' = \pi^2(k^2 + 1)t$, cosicché

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{dt'}{dt} \frac{df}{dt'} = \pi^2(k^2 + 1) \frac{df}{dt'}.$$

Con un abuso di notazione, d'ora in poi si indica $(\dot{})$ la derivata rispetto a t' . La stessa variabile t' viene indicata con t . Le equazioni diventano

$$\begin{cases} \dot{a}(t) = \sigma a(t) + \sigma R \frac{k}{\pi^3(k^2 + 1)^2} b(t) \\ \dot{b}(t) = -b(t) + \frac{k}{k^2 + 1} a(t)c(t) - \frac{k}{\pi(k^2 + 1)} a(t) \\ \dot{c}(t) = \frac{k}{2(k^2 + 1)} a(t)b(t) - \frac{4}{k^2 + 1} c(t). \end{cases}$$

Viene definito infine il cambio di variabili

$$\begin{cases} X(t) = \frac{k}{\sqrt{2}(k^2 + 1)} a(t) \\ Y(t) = \frac{k}{\sqrt{2}(k^2 + 1)} \left[-\frac{Rk}{\pi^3(k^2 + 1)^2} \right] b(t) \\ Z(t) = \left[-\frac{Rk^2}{\pi^3(k^2 + 1)} \right] c(t) \end{cases}$$

che porta alla forma classica del sistema dinamico di Lorenz

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} = -Y + \rho X - XZ \\ \dot{Z} = -\beta Z + XY, \end{cases}$$

avendo definito i parametri

$$\rho = \frac{Rk^2}{\pi^4(k^2 + 1)^2}, \quad \beta = \frac{4}{k^2 + 1}.$$

7.14 Exercises

Exercise 7.1 La velocità di pattugliamento di un sottomarino vale $V_v = 2.5 \text{ m/s}$. Considerando che il sottomarino si muova in acqua in condizioni standard, a quale velocità deve essere provato un modello in scala $\lambda = 1/10$, avendo a disposizione rispettivamente:

- una galleria ad acqua in condizioni standard,
- una galleria ad aria a pressione di 10 bar e temperatura di 30°C ?

Se la resistenza al vero vale $D_v = 6000 \text{ N}$, quanto vale la resistenza sui modelli in scala nei due casi?

(Galleria ad aria: $V_m = 35.17 \text{ m/s}$, $D_m = 136.1 \text{ N}$. Galleria ad acqua: $V_m = 25 \text{ m/s}$, $D_m = 6000 \text{ N}$.)

Exercise 7.2 Un missile vola alla quota di 7000 m, dove la densità dell'aria è $\rho = 0.59 \text{ kg/m}^3$ e la sua temperatura è $T = -30.45^\circ\text{C}$, alla velocità costante $V_v = 505 \text{ km/h}$.

Determinare: \begin{itemize} \item il fattore di scala geometrico $\lambda = L_m/L_v$, \item la velocità dell'aria V_m , \end{itemize} necessari per riprodurre correttamente i coefficienti aerodinamici del missile in una galleria del vento che operi a condizioni atmosferiche standard ($\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$, $p = 101325 \text{ Pa}$, $T = 15^\circ\text{C}$).

($V_m = 152.8 \text{ m/s}$, $\lambda = 0.507$)

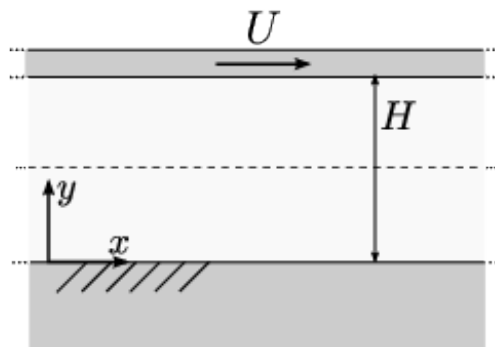
Exercise 7.3 Un aeromobile vola nell'alta atmosfera a velocità costante $V_v = 252 \text{ m/s}$, in condizioni di densità ρ_v e temperatura T_v assegnate: $\rho_v = 0.424 \text{ kg/m}^3$, $T_v = -50.3^\circ\text{C}$.

\newline Determinare la velocità, la densità e la pressione dell'aria da utilizzarsi in una galleria del vento pressurizzata che operi alla temperatura di 15°C per ottenere la similitudine dinamica corretta con un modello in scala ridotta $\lambda = 0.2$.

($V_m = 286.6 \text{ m/s}$, $\rho_m = 2.292 \text{ kg/m}^3$, $p_m = 189560 \text{ Pa}$)

Exercise 7.4 Si vuole studiare con la corrente di aria che esce da un ugello verticale di diametro $\tilde{D} = 0.01 \text{ m}$, nell'intervallo di velocità di riferimento $\tilde{U} \in [1, 10] \text{ m/s}$. Si ha a disposizione un codice numerico che risolve le equazioni in forma adimensionale, in cui non è possibile variare le condizioni al contorno, e una sola griglia di calcolo. Si chiede di:

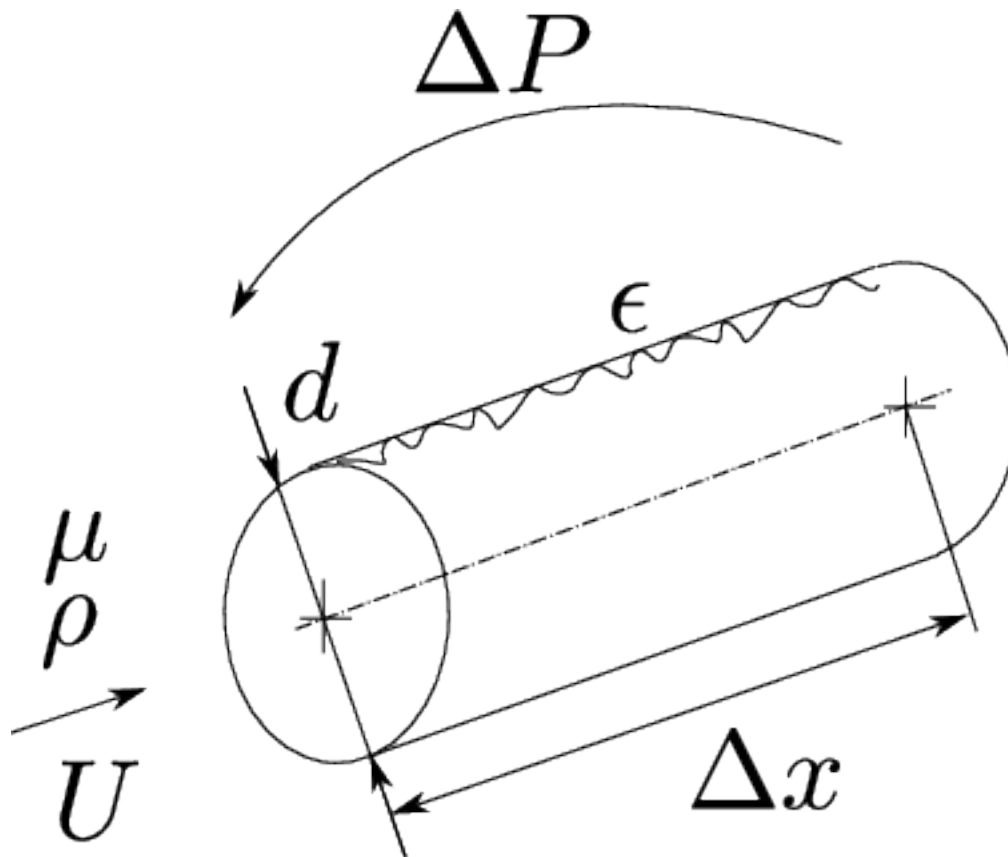
- determinare l'intervallo di numeri di Reynolds Re da inserire nel codice, sapendo che la velocità di riferimento nel codice è $U = 1$ e il diametro nella griglia vale $D = 1$.
- la frequenza \tilde{f} di rilascio di vortici quando $\tilde{U} = 1 \text{ m/s}$, sapendo che la frequenza estratta dai risultati numerici è $f = 0.2$;
- stimare l'errore compiuto dal codice nel trascurare l'effetto della gravità.



Exercise 7.5 Si deve progettare un condotto che trasporti un fluido con densità ρ_1 e viscosità μ_1 , di diametro d_1 e lunghezza L_1 . Si suppone che la rugosità della superficie interna del condotto possa essere descritta interamente dall'altezza media ϵ_1 delle asperità. Il condotto deve garantire una portata massica Q_1 . Viene realizzato un modello in scala $\lambda = d_2/d_1$ del condotto di lunghezza L_2 , nel quale viene fatto scorrere lo stesso fluido alle stesse condizioni termodinamiche. Si chiede di determinare:

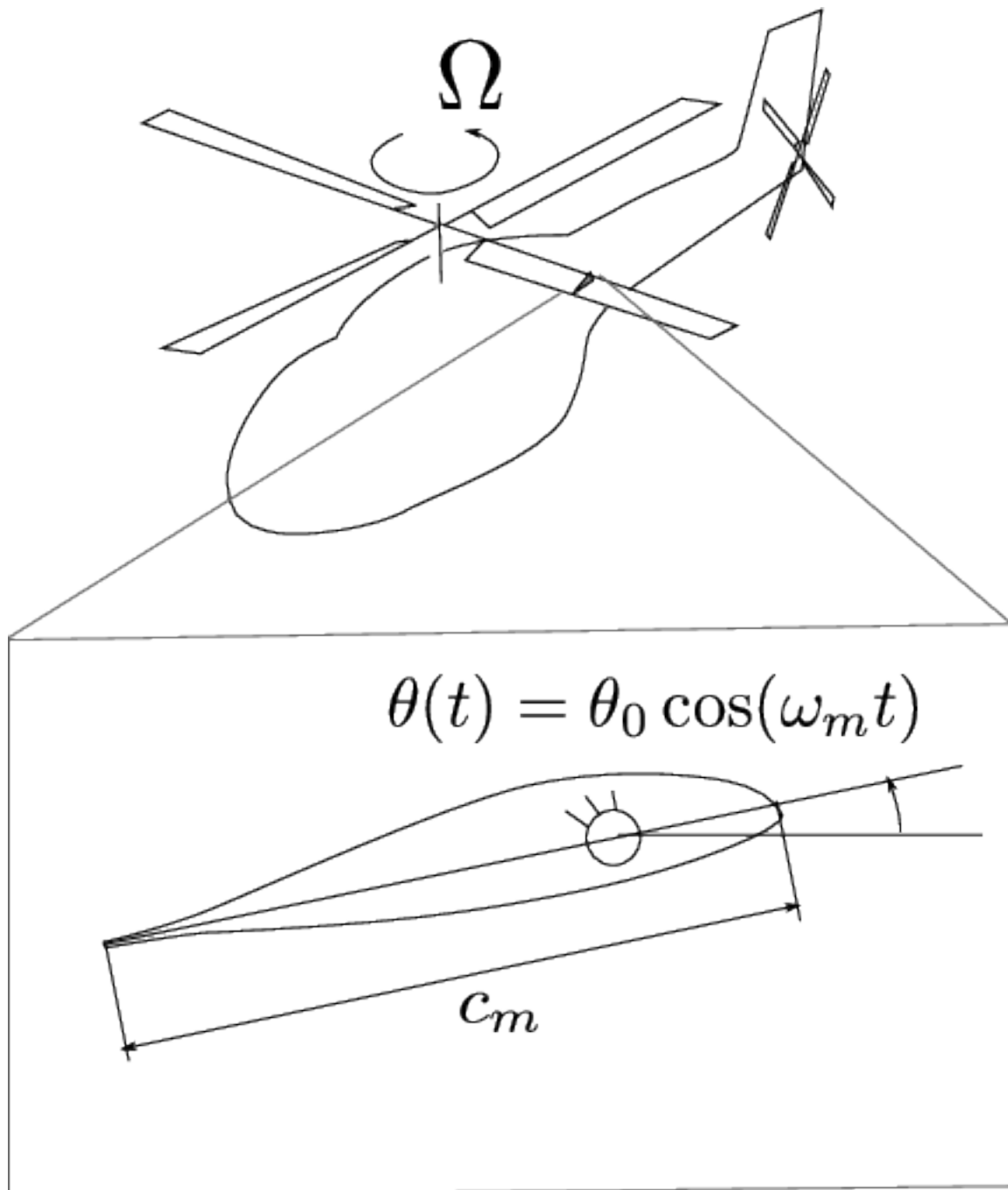
- la finitura superficiale della superficie interna del modello, in termini di dimensione caratteristica della rugosità ϵ_2 ;
- la velocità media di prova U_2 ;
- la differenza di pressione da imporre alle estremità del condotto al vero, conoscendo che la differenza di pressione ΔP_2 misurata in laboratorio.

Si supponga il fluido incomprimibile.



Exercise 7.6 L'obiettivo di una prova in galleria è lo studio del campo di moto attorno a una pala di elicottero, in particolare attorno alla sezione che si trova a metà della lunghezza della pala, $R_v = 6.85 m$. Il rotore dell'elicottero ruota con una velocità angolare Ω_v , tale da avere una velocità $U_{tip} = 200 m/s$ (per evitare il regime supersonico). La corda della pala nella sezione analizzata è $c_v = 0.30 m$. Il modello di galleria a circuito aperto è costituito da una superficie alare, incernierata su un asse perpendicolare alla direzione del vento di galleria, in corrispondenza dell'asse "di comando del passo". Sapendo che la massima velocità raggiungibile nell'impianto utilizzato è $U_m = 50 m/s$, si chiede di determinare:

- la corda del modello c_m , per ottenere la similitudine in Re e di commentare gli effetti di comprimibilità;
- la frequenza di oscillazione ω_m da imporre al profilo per simulare il cambio di incidenza dovuti ai comandi di passo collettivo e ciclico;
- una stima della potenza dell'impianto necessaria a svolgere la prova, conoscendo le dimensioni della camera di prova rettangolare, $b = 1.5 m$, $h = 1.0 m$.



7.14.1 Exercise 7.1

Exercise 7.1 La velocità di pattugliamento di un sottomarino vale $V_v = 2.5 \text{ m/s}$. Considerando che il sottomarino si muova in acqua in condizioni standard, a quale velocità deve essere provato un modello in scala $\lambda = 1/10$, avendo a disposizione rispettivamente:

- una galleria ad acqua in condizioni standard,
- una galleria ad aria a pressione di 10 bar e temperatura di 30°C ?

Se la resistenza al vero vale $D_v = 6000 \text{ N}$, quanto vale la resistenza sui modelli in scala nei due casi?

(Galleria ad aria: $V_m = 35.17 \text{ m/s}$, $D_m = 136.1 \text{ N}$. Galleria ad acqua: $V_m = 25 \text{ m/s}$, $D_m = 6000 \text{ N}$.)

Similitudine fluidodinamica per correnti incomprimibili, numero di Reynolds,

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} .$$

Formula di Sutherland per la viscosità dinamica **dei gas**,

$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \frac{C + T_0}{C + T} .$$

Azioni agenti sul modello e coefficienti di forza.

La velocità sul modello si trova tramite l'uguaglianza dei numeri di Reynolds,

$$\frac{\rho_v U_v L_v}{\mu_v} = \frac{\rho_m U_m L_m}{\mu_m} \quad \rightarrow \quad U_m = U_v \frac{\rho_v L_v}{\rho_m L_m} \cdot \frac{\mu_m}{\mu_v}$$

Per trovare la viscosità dell'aria viene utilizzata la formula di Sutherland (per l'aria i coefficienti sono $T_0 = 288\text{K}$, $C = 110.4\text{K}$, $\mu_0 = 18.27 \mu\text{Pas}$). Il coefficienti di viscosità dinamica dell'acqua in condizioni standard è dell'ordine di 10^{-3} kg/(m s) . La forza agente aerodinamica agente sul corpo, la cui superficie esterna è indicata con S , è la risultante degli sforzi di superficie esterna del corpo S_b ,

$$\mathbf{F} = \oint_S \mathbf{t}_n = \oint_S -p \hat{\mathbf{n}} + \mu [\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

Vengono scelte la densità caratteristica del fluido ρ , una velocità caratteristica della corrente U e una lunghezza caratteristica del problema L , per definire la scala della pressione $P = \rho U^2$. Raccogliendo le dimensioni fisiche fuori dal segno di integrale è quindi possibile scrivere,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \oint_{S_b} -P p^* \hat{\mathbf{n}} + \frac{\mu U}{L} [\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*T} \mathbf{u}^*] \hat{\mathbf{n}} = & (P = \rho U^2, dS = L^2 dS^*) \\ &= \rho U^2 L^2 \oint_{S_b^*} -p^* \hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{Re} [\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*T} \mathbf{u}^*] \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \frac{1}{2} \rho U^2 S \mathbf{c}_F(Re), \end{aligned}$$

avendo introdotto il coefficiente di forza \mathbf{c}_F ,

$$\mathbf{c}_F = 2 \frac{L^2}{S} \oint_{S_b^*} -p^* \hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{Re} [\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*T} \mathbf{u}^*] \hat{\mathbf{n}}$$

che può dipendere dalle variabili fisiche solo attraverso i numeri adimensionali del problema (in questo caso solo da Re , per problemi comprimibili anche da M) e che rappresenta la forza agente sul corpo adimensionalizzata con la pressione

dinamica $\frac{1}{2}\rho U^2$ e con una superficie di riferimento del corpo S . La superficie di riferimento S scala con L^2 ($S = aL^2$, a costante). Si può scrivere la risultante delle forze sul modello e al vero come

$$\begin{cases} \mathbf{F}_m = \frac{1}{2}\rho_m U_m^2 S_m^2 \mathbf{c}_F(Re_m) \\ \mathbf{F}_v = \frac{1}{2}\rho_v U_v^2 S_v^2 \mathbf{c}_F(Re_v) . \end{cases}$$

Poichè è soddisfatta la similitudine fluidodinamica, i valori dei coefficienti di forza del modello e «al vero» sono uguali. Si può quindi scrivere

$$\mathbf{F}_m = \frac{\rho_m}{\rho_v} \left(\frac{U_m}{U_v}\right)^2 \left(\frac{S_m}{S_v}\right) \mathbf{F}_v = \frac{\rho_m}{\rho_v} \left(\frac{U_m}{U_v}\right)^2 \left(\frac{L_m}{L_v}\right)^2 \mathbf{F}_v = \frac{\rho_m}{\rho_v} \left(\frac{U_m}{U_v}\right)^2 \lambda^2 \mathbf{F}_v ,$$

Nel caso della galleria ad acqua, nella quale il fluido è lo stesso e nello stesso stato termodinamico della situazione reale ($\rho_m = \rho_v$, $\mu_m = \mu_v$), l'uguaglianza dei numeri di Reynolds si semplifica in

$$\frac{\rho_m U_m L_m}{\mu_m} = \frac{\rho_v U_v L_v}{\mu_v} \quad \rightarrow \quad U_m L_m = U_v L_v .$$

Quindi, in questo caso la forza agente sul modello di galleria coincide con la forza agente sul corpo nella situazione reale,

$$\mathbf{F}_m^{H_2O,s} = \mathbf{F}_v^{H_2O,s} .$$

7.14.2 Exercise 7.2

Exercise 7.2 Un missile vola alla quota di 7000 m, dove la densità dell'aria è $\rho = 0.59 \text{ kg/m}^3$ e la sua temperatura è $T = -30.45^\circ\text{C}$, alla velocità costante $V_v = 505 \text{ km/h}$.

Determinare: \begin{itemize} \item il fattore di scala geometrico $\lambda = L_m/L_v$, \item la velocità dell'aria V_m , \end{itemize} necessari per riprodurre correttamente i coefficienti aerodinamici del missile in una galleria del vento che operi a condizioni atmosferiche standard ($\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$, $p = 101325 \text{ Pa}$, $T = 15^\circ\text{C}$).

($V_m = 152.8 \text{ m/s}$, $\lambda = 0.507$)

Similitudine fluidodinamica: numeri di Reynolds e di Mach.

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} \quad , \quad M = \frac{U}{c} .$$

Formula di Sutherland per la viscosità dinamica dei gas,

$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1.5} \frac{C + T_0}{C + T} .$$

Assumendo che l'aria si comporti come gas ideale, per il quale vale l'equazione di stato $p = \rho RT$, la velocità del suono vale $c = \sqrt{\gamma RT}$, dove $\gamma = c_p/c_v$ è il rapporto dei calori specifici a pressione e volume costante, che vale $\gamma = 1.4$ per un gas biatomico. La costante del gas R è definita come il rapporto tra la costante universale dei gas \mathcal{R} e la massa molare M_m , $R = \mathcal{R}/M_m$. La massa molare dell'aria secca vale $M_m = 28.96 \text{ kg/kmol}$ e la sua costante R vale

$$R = \frac{\mathcal{R}}{M_m} = \frac{8314.4 \text{ J/(kmol K)}}{28.97 \text{ kg/kmol}} = 287.0 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} .$$

La velocità del suono nell'aria alle condizioni termodinamiche del problema vale $c = 312.3 \text{ m/s}$. Il numero di Mach caratteristico della corrente è quindi $M = 0.45$ e gli effetti di comprimibilità non possono essere trascurati, poichè il numero di Mach è maggiore della valore convenzionale 0.3 che identifica il limite della validità dell'approssimazione di fluido incomprimibile. Per ottenere la similitudine tra problema reale e quello modellato (di dimensioni ridotte) è

necessaria la similitudine geometrica e l'uguaglianza dei numeri adimensionali che caratterizzano il problema, il numero di Reynolds Re e il numero di Mach M .

$$\begin{cases} M_1 = M_2 \\ Re_1 = Re_2 \end{cases} .$$

Utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti,

$$\begin{cases} \frac{V_v}{\sqrt{\gamma RT_v}} = \frac{V_m}{\sqrt{\gamma RT_m}} \\ \frac{\rho_v V_v L_v}{\mu(T_v)} = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu(T_m)} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ottiene l'espressione delle incognite

$$\begin{cases} V_m = V_v \sqrt{\frac{T_m}{T_v}} \\ \lambda = \frac{L_m}{L_v} = \frac{\rho_v}{\rho_m} \sqrt{\frac{T_v}{T_m}} \frac{\mu(T_m)}{\mu(T_v)} \end{cases}$$

Per trovare i valori ancora incogniti della viscosità dinamica si usa la formula di Sutherland: per l'aria i coefficienti sono $T_0 = 288K$, $C = 110.4K$. Si ottengono i valori numerici $V_m = 152.8m/s$, $\lambda = 0.507$.

Osservazioni. Non è sempre possibile imporre l'uguaglianza di Re e M . Si pensi ad esempio a un'applicazione in aria in condizioni standard e prove sul modello in galleria ad aria in condizioni standard. Per ottenere l'uguaglianza dei numeri di Mach, bisogna avere la stessa velocità caratteristica (poichè la celerità del suono è la stessa tra condizione reale e modello). Avendo uguagliato le velocità caratteristiche ed essendo uguali le variabili termodinamiche ρ e μ , si ottiene l'uguaglianza della dimensione caratteristica del modello. Questo significa che sarebbe necessario avere un modello in scala 1:1 per soddisfare la similitudine utilizzando nella prova sperimentale lo stesso fluido nelle stesse condizioni termodinamiche delle condizioni «al vero». Per limiti tecnologici e di costi, dovuti alle dimensioni degli apparati sperimentali, spesso è necessario utilizzare un modello in scala dell'originale. Esistono gallerie controllate in pressione per variare lo stato termodinamico dell'aria di prova e gallerie che utilizzando acqua come fluido di prova: entrambe queste scelte comportano complicazioni nel progetto e nell'utilizzo dell'impianto, traducibile spesso in costi elevati. Allora per quale numero adimensionale o secondo quale combinazione dei numeri adimensionali conviene ottenere la similitudine? «Arte», esperienza e alcuni «espediti» sperimentali, che non sono oggetto di questo corso hanno lo scopo di ottenere risultati rappresentativi del problema al vero, anche se la perfetta similitudine non è soddisfatta.

7.14.3 Exercise 7.3

Exercise 7.3 Un aeromobile vola nell'alta atmosfera a velocità costante $V_v = 252 m/s$, in condizioni di densità ρ_v e temperatura T_v assegnate: $\rho_v = 0.424 kg/m^3$, $T_v = -50.3^\circ C$.

Determinare la velocità, la densità e la pressione dell'aria da utilizzarsi in una galleria del vento pressurizzata che operi alla temperatura di $15^\circ C$ per ottenere la similitudine dinamica corretta con un modello in scala ridotta $\lambda = 0.2$.

($V_m = 286.6 m/s$, $\rho_m = 2.292 kg/m^3$, $p_m = 189560 Pa$)

Similitudine fluidodinamica: numeri di Reynolds e di Mach.

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} \quad , \quad M = \frac{U}{c} .$$

Formula di Sutherland per la viscosità dinamica dei gas,

$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \frac{C + T_0}{C + T} .$$

Assumendo che l'aria si comporti come gas ideale, per il quale vale l'equazione di stato $p = \rho RT$, la velocità del suono vale $c = \sqrt{\gamma RT}$, dove $\gamma = c_p/c_v$ è il rapporto dei calori specifici a pressione e volume costante, che vale $\gamma = 1.4$ per un gas biatomico. La costante del gas R è definita come il rapporto tra la costante universale dei gas \mathcal{R} e la massa molare M_m , $R = \mathcal{R}/M_m$. La massa molare dell'aria secca vale $M_m = 28.96 \text{ kg/kmol}$ e la sua costante R vale

$$R = \frac{\mathcal{R}}{M_m} = \frac{8314.4 \text{ J/(kmol K)}}{28.97 \text{ kg/kmol}} = 287.0 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} .$$

La velocità del suono nell'aria alle condizioni termodinamiche del problema vale $c = 299.2 \text{ m/s}$. Il numero di Mach caratteristico della corrente è quindi $M = 0.84$ e gli effetti di comprimibilità non possono essere trascurati, poiché il numero di Mach è maggiore della valore convenzionale 0.3 che identifica il limite della validità dell'approssimazione di fluido incomprimibile. Per ottenere la similitudine tra problema reale e quello modellato (di dimensioni ridotte) è necessaria la similitudine geometrica e l'uguaglianza dei numeri adimensionali che caratterizzano il problema, il numero di Reynolds Re e il numero di Mach M .

$$\begin{cases} M_1 = M_2 \\ Re_1 = Re_2 \end{cases} .$$

Utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti,

$$\begin{cases} \frac{V_v}{\sqrt{\gamma RT_v}} = \frac{V_m}{\sqrt{\gamma RT_m}} \\ \frac{\rho_v V_v L_v}{\mu(T_v)} = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu(T_m)} \end{cases}$$

Risolviendo il sistema, si ottiene l'espressione delle incognite:

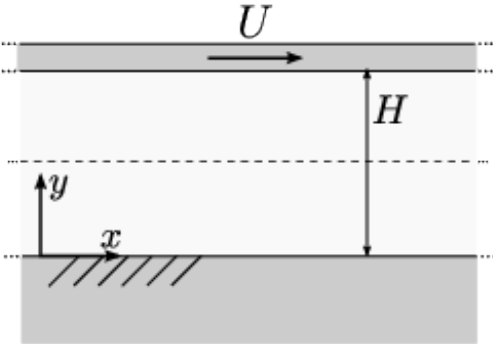
$$\Rightarrow \begin{cases} V_m = V_v \sqrt{\frac{T_m}{T_v}} \\ \rho_m = \frac{1}{\lambda} \rho_v \sqrt{\frac{T_v}{T_m}} \frac{\mu(T_m)}{\mu(T_v)} \\ P_m = \rho_m R T_m = \frac{1}{\lambda} \frac{\mu(T_m)}{\mu(T_v)} \rho_v R \sqrt{T_v T_m} \end{cases}$$

Per trovare i valori ancora incogniti della viscosità dinamica si usa la formula di Sutherland: per l'aria i coefficienti sono $T_0 = 288K$, $C = 110.4K$. Si ottengono i valori numerici $V_m = 286.6 \text{ m/s}$, $\rho_m = 2.292 \text{ kg/m}^3$, $p_m = 189560 \text{ Pa}$.

7.14.4 Exercise 7.4

Exercise 7.4 Si vuole studiare con la corrente di aria che esce da un ugello verticale di diametro $\tilde{D} = 0.01 \text{ m}$, nell'intervallo di velocità di riferimento $\tilde{U} \in [1, 10] \text{ m/s}$. Si ha a disposizione un codice numerico che risolve le equazioni in forma adimensionale, in cui non è possibile variare le condizioni al contorno, e una sola griglia di calcolo. Si chiede di:

- determinare l'intervallo di numeri di Reynolds Re da inserire nel codice, sapendo che la velocità di riferimento nel codice è $U = 1$ e il diametro nella griglia vale $D = 1$.
- la frequenza \tilde{f} di rilascio di vortici quando $\tilde{U} = 1 \text{ m/s}$, sapendo che la frequenza estratta dai risultati numerici è $f = 0.2$;
- stimare l'errore compiuto dal codice nel trascurare l'effetto della gravità.



Similitudine fluidodinamica. Numeri di Reynolds e Froude. Ordini di grandezza dei termini.

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} \quad , \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$$

- Affinchè le simulazioni numeriche siano rappresentative della corrente incomprimibile che si vuole studiare, è necessario che ci sia similitudine fluidodinamica tra i due casi: bisogna imporre l'uguaglianza dei numeri di Reynolds

$$Re = \frac{\tilde{U}\tilde{D}}{\tilde{\nu}} \approx \frac{(1 \div 10)m/s \times 10^{-2}m}{10^{-5}m^2/s} = 10^3 \div 10^4 .$$

- Se la frequenza adimensionale ottenuta dalla simulazione numerica è $f = 0.2$, la frequenza dimensionale viene ottenuta dall'uguaglianza dei numeri di Strouhal, cioè «ri-dimensionalizzando» f con le grandezze di riferimento usate per l'adimensionalizzazione (U, L, ρ).

$$\frac{fD}{U} = \frac{\tilde{f}\tilde{D}}{\tilde{U}} \Rightarrow \tilde{f} = f \frac{\tilde{U}}{\tilde{D}} = 0.2 \times \frac{1m/s}{10^{-2}m} = 20s^{-1} .$$

- Per quantificare l'effetto della gravità, si calcola il valore del numero di Froude. Nelle equazioni di Navier-Stokes adimensionali, compare il numero adimensionale $gD/U^2 = 1/Fr^2$ davanti ai termini di forze di volume. Più questo numero è «piccolo», più gli effetti delle forze di volume sono ridotti.

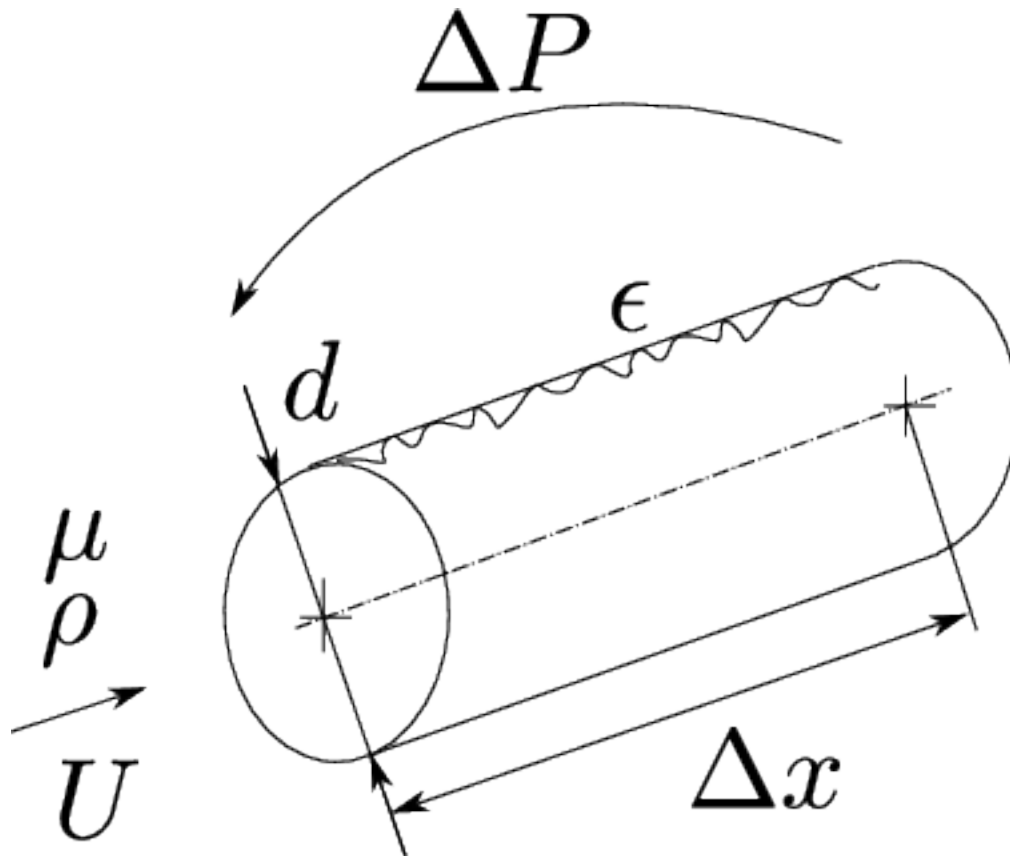
$$\begin{cases} U = 1m/s & : & 1/Fr^2 \approx 10^{-1} \\ U = 10m/s & : & 1/Fr^2 \approx 10^{-3} \end{cases}$$

7.14.5 Exercise 7.5

Exercise 7.5 Si deve progettare un condotto che trasporti un fluido con densità ρ_1 e viscosità μ_1 , di diametro d_1 e lunghezza L_1 . Si suppone che la rugosità della superficie interna del condotto possa essere descritta interamente dall'altezza media ϵ_1 delle asperità. Il condotto deve garantire una portata massica Q_1 . Viene realizzato un modello in scala $\lambda = d_2/d_1$ del condotto di lunghezza L_2 , nel quale viene fatto scorrere lo stesso fluido alle stesse condizioni termodinamiche. Si chiede di determinare:

- la finitura superficiale della superficie interna del modello, in termini di dimensione caratteristica della rugosità ϵ_2 ;
- la velocità media di prova U_2 ;
- la differenza di pressione da imporre alle estremità del condotto al vero, conoscendo che la differenza di pressione ΔP_2 misurata in laboratorio.

Si supponga il fluido incomprimibile.



Teorema di Buckingham. Similitudine fluidodinamica.

Il problema è caratterizzato dal fluido utilizzato, dalla geometria del condotto e dal gradiente di pressione necessario a garantire la portata desiderata. Si può scrivere in maniera implicita

$$f\left(\frac{\Delta P}{\Delta x}, U, \rho, \mu, d, \epsilon\right) = 0$$

avendo scelto come grandezza fisica caratteristica del problema il gradiente di pressione $\frac{\Delta P}{\Delta x}$ e non il salto di pressione e la lunghezza del tubo prese indipendentemente. Il teorema di Buckingham garantisce che il problema può essere caratterizzato da 3 numeri adimensionali (6 grandezze fisiche - 3 grandezze fondamentali (M,L,T)). Se si scelgono ρ, U, d come grandezze di riferimento, si possono costruire i tre numeri adimensionali come

$$\pi_1 = \frac{\Delta P}{\Delta x} \frac{d}{\rho U^2} = f_D \quad \pi_2 = \frac{\mu}{\rho U d} = 1/Re \quad \pi_3 = \frac{\epsilon}{d} = \epsilon'$$

Il problema può essere quindi scritto in forma implicita come:

$$g(f_D, Re, \epsilon') = 0. \text{ Esplícitando } f_D: f_D = h(Re, \epsilon') \quad \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{\rho U^2}{d} f_D(Re, \epsilon').$$

Affinchè sia verificata la similitudine fluidodinamica, ci deve essere l'uguaglianza dei numeri di Reynolds Re e delle rugosità adimensionalizzate ϵ' .

- Dall'uguaglianza delle rugosità adimensionalizzate $\epsilon'_1 = \epsilon'_2 \Rightarrow \epsilon'_2 = \epsilon'_1 \frac{d_2}{d_1} = \lambda \epsilon_1$. Per il modello quindi necessaria una lavorazione che garantisca una finitura superficiale migliore rispetto al condotto (le 1\$).

- La velocità media al vero U_1 viene ricavata grazie alla richiesta dell'aportata desiderata.

$$U_1 = \frac{Q}{\rho \frac{\pi}{4} d_1^2}$$

Per ottenere la similitudine fluidodinamica si impone l'uguaglianza dei numeri di Reynolds

$$Re_1 = Re_2 =: Re \quad \Rightarrow \quad U_2 = U_1 \frac{\rho_1 d_1 \nu_2}{\rho_2 d_2 \nu_1} = U_1 \frac{d_1}{d_2}$$

poichè la densità e la viscosità del fluido «di prova» sono le stesse di quelle del fluido «al vero».

- Il rapporto tra la differenza di pressione ΔP_2 misurata sul condotto modello e la lunghezza del condotto modello L_2 permette di stimare il gradiente di pressione $\left. \frac{\Delta P}{\Delta x} \right|_2 = \frac{\Delta P_2}{L_2}$. Sfruttando ancora una volta la similitudine fluidodinamica

$$\begin{cases} \frac{\Delta P_2}{L_2} = \frac{\rho_2 U_2^2}{d_2} f_D(Re, \epsilon') \\ \frac{\Delta P_1}{L_1} = \frac{\rho_1 U_1^2}{d_1} f_D(Re, \epsilon') \end{cases} \Rightarrow \Delta P_1 = \Delta P_2 \frac{\rho_1 U_1^2 d_2 L_1}{\rho_2 U_2^2 d_1 L_2}$$

Dall'uguaglianza delle densità $\rho_1/\rho_2 = 1$; dall'uguaglianza dei numeri di Reynolds (e delle densità e viscosità) $U_1^2/U_2^2 = d_2^2/d_1^2$. La formula può quindi essere semplificata

$$\Delta P_1 = \Delta P_2 \frac{d_2^3 L_1}{d_1^3 L_2} = \Delta P_2 \lambda^3 \frac{L_1}{L_2}$$

Diagramma di Moody.

Il diagramma di Moody riporta il coefficiente f_D in funzione del numero di Re e della rugosità del tubo. Si possono individuare due regimi estremi del problema. Per «basse velocità» (o meglio, bassi numeri di Reynolds), si può intuire che gli effetti della viscosità prevalgano sugli effetti inerziali; inoltre, gli effetti della rugosità sono minimi. Si può quindi pensare che il problema sia indipendente dalla densità del fluido e dalla rugosità del tubo e descrivibile in forma implicita come

$$f_L(\Delta P/\Delta x, \mu, U, d) = 0 \text{ Si pu}$$

$$\pi_{1,L} = \frac{\Delta P}{\Delta x} \frac{d^2}{\mu U}$$

Il problema può essere scritto in forma implicita $g_L(\pi_{1,L}) = 0$. Poichè la funzione g_L dipende solo dal coefficiente $\pi_{1,L}$, il coefficiente $\pi_{1,L}$ deve essere costante. Il gradiente di pressione può essere scritto

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = \pi_{1,L} \frac{\mu U}{d^2} = \frac{\rho U^2}{d} f_D$$

avendo usato la definizione di f_D introdotta nell'equazione ($\text{[eqn:pi]} \{ \text{reference-type}=\text{ref} \} \text{reference}=\text{eqn:pi}$). É quindi possibile stimare l'andamento del coefficiente f_D , per bassi numeri di Reynolds, invertendo l'equazione precedente. Si scopre che il coefficiente f_D è inversamente proporzionale al numero di Reynolds.

$$f_D = \pi_{1,L} \frac{\mu}{\rho U d} = \pi_{1,L} \frac{1}{Re}.$$

Per bassi numeri di Reynolds, il parametro f_D in funzione di Re mostra un andamento lineare in un diagramma con assi logaritmici, a conferma della correttezza della stima appena svolta.

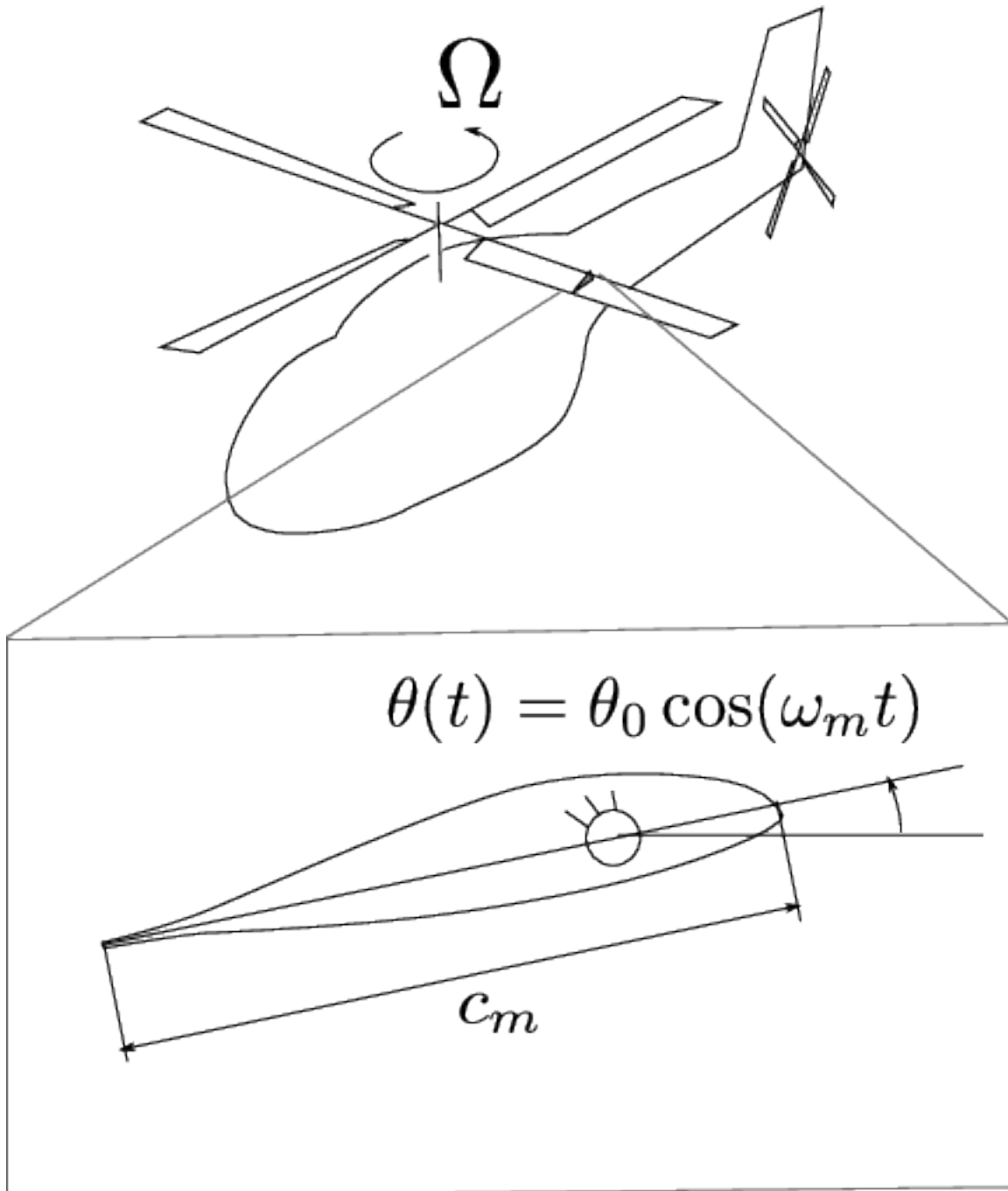
Si può ragionare in maniera analoga per il regime di moto estremo opposto, dove gli effetti della viscosità sono trascurabili. Si scopre che il coefficiente f_D è funzione solo della rugosità adimensionale ϵ , mentre non dipende dal numero di Reynolds. Per alti numeri di Reynolds, il parametro f_D è descritto da curve che tendono a un valore costante, che dipende dal valore della rugosità adimensionale ϵ' .

{width=»100%»}

7.14.6 Exercise 7.6

Exercise 7.6 L'obiettivo di una prova in galleria è lo studio del campo di moto attorno a una pala di elicottero, in particolare attorno alla sezione che si trova a metà della lunghezza della pala, $R_v = 6.85 m$. Il rotore dell'elicottero ruota con una velocità angolare Ω_v , tale da avere una velocità $U_{tip} = 200 m/s$ (per evitare il regime supersonico). La corda della pala nella sezione analizzata è $c_v = 0.30 m$. Il modello di galleria a circuito aperto è costituito da una superficie alare, incernierata su un asse perpendicolare alla direzione del vento di galleria, in corrispondenza dell'asse "di comando del passo". Sapendo che la massima velocità raggiungibile nell'impianto utilizzato è $U_m = 50 m/s$, si chiede di determinare:

- la corda del modello c_m , per ottenere la similitudine in Re e di commentare gli effetti di comprimibilità;
- la frequenza di oscillazione ω_m da imporre al profilo per simulare il cambio di incidenza dovuti ai comandi di passo collettivo e ciclico;
- una stima della potenza dell'impianto necessaria a svolgere la prova, conoscendo le dimensioni della camera di prova rettangolare, $b = 1.5 m$, $h = 1.0 m$.



Similitudine fluidodinamica. Comando elicottero. Stima potenza galleria del vento.

- Per ottenere la similitudine in Re , è necessario uguagliare i numeri di Reynolds ottenuti con le grandezze dimensionali caratteristiche del problema. La lunghezza di riferimento è la corda. La velocità di riferimento è la velocità che investe il profilo della pala considerato; nella prova di galleria è la velocità di galleria U_m , nella realtà è la velocità relativa dovuta alla rotazione della pala (alla quale deve essere sovrapposto il moto dell'elicottero, in caso di avanzamento, qui ipotizzato nullo): $U_v = \Omega R_v/2 = U_{tip}/2$. Il fluido è sempre aria.

$$\frac{U_v c_v}{\nu} = \frac{U_m c_m}{\nu} \quad \Rightarrow \quad c_m = c_v \frac{U_{tip}}{2 U_m} = 0.60 \text{ m}$$

In questo esempio, per avere similitudine in Re serve un modello con una corda maggiore della corda reale.

Gli effetti di comprimibilità possono essere valutati calcolando il numero di Mach. Il numero di Mach per la sezione di pala considerata nella realtà è $M_v \approx 100/340 \approx 0.3$, limite convenzionale per potere trascurare gli effetti di comprimibilità. Per la prova in galleria $M_m \approx 0.15$.

- Il comando di passo ciclico è periodico e armonico con frequenza $\Omega_v = U_{tip}/R_v = 29.19 \text{ s}^{-1}$. Per essere in similitudine con la realtà è necessario avere uguaglianza dei numeri di Strouhal (o *frequenze ridotte*, indicate da strutturisti e aeroelastici con k).

$$\frac{\Omega c_v}{U_v} = \frac{\omega_m c_m}{U_m} \quad \Rightarrow \quad \omega_m = \Omega \frac{c_v}{c_m} \frac{U_m}{U_v} = \Omega \left(\frac{U_m}{U_v} \right)^2$$

- In un impianto a galleria aperta si può ricavare la formula per la stima della potenza necessaria da un bilancio integrale di energia cinetica

$$P \approx \frac{1}{2} \rho U^3 A .$$

Incompressible Aerodynamics

todo Update the introduction

In many situations in aeronautics, the flow of interest can be modelled as irrotational in the whole domain, except for very thin regions where vorticity and viscous effects are lumped. This is the case of **high-Re** flows, with uniform free-stream velocity (so that incoming vorticity is zero), around **streamlined bodies** with small angles between their «longitudinal» direction and the free-stream velocity: if all these conditions are met, it's likely no large separation and recirculation regions occur and the vorticity and viscosity effects are only relevant in the thin **boundary layer** at the solid surface of the body and in thin **wakes** shed downstream¹.

Under these circumstances, the governing equations can be recast as **Poisson problems** for the kinetic potential $\phi(\mathbf{r})$, or for the vector potential $\psi(\mathbf{r})$. Being the problem *linear* - for a wake with given shape - *principle of superposition of causes and effects* holds: the solution of the problem can be written as the linear combination of - usually simpler - solutions of the problem. This strategy naturally arises solving the Poisson problem with Green's function method, that produces a boundary problem and whose solution is the superposition of distributions of *sources*, *doublets*, and *vortices*. These solutions are simple, but *singular*, requiring the need of some caution and some introduction and discussion of their properties, before using them into problems in aerodynamics.

Poisson problems for $\phi(\mathbf{r})$, and $\psi(\mathbf{r})$ are somehow dual, if jumps in these potential fields are allowed. The problem can be approached without the need for jumps in potentials, by exploiting Helmholtz's decomposition of the velocity field $\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \psi$ and solving two Poisson equations supplemented with proper boundary conditions and regularity conditions.

Theorems. Kelvin's theorem and Helmholtz's theorems.

Singularities. Introduction of source, doublet and vortex singularities as solution of Poisson equations, and discussion of their properties.

Steady aerodynamics.

Unsteady aerodynamics.

- Deal with equations, wakes and shape and connection of the domain
- 2-dimensional vs. 3-dimensional flows

¹ As an example, the relation between thickness of boundary layer flows and Reynolds number in this book is shown with Prandtl equations for the laminar boundary layer, $\delta(x) \sim x\text{Re}_x^{-\frac{1}{2}}$, **todo** add examples with turbulent flows.

- *Thin airfoil and wing theory*

Old introduction

Per correnti irrotazionali ($\omega = \mathbf{0}$) in un dominio semplicemente connesso ($\mathbf{u} = \nabla\phi$) di fluidi incomprimibili ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), il potenziale cinetico soddisfa l'equazione di Laplace $\Delta\phi = 0$. Infatti, inserendo nel vincolo di incomprimibilità la relazione che lega il potenziale cinetico alla velocità si ottiene

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla\phi) = \nabla^2\phi = \Delta\phi.$$

Come nel caso della seconda e della terza forma del teorema di Bernoulli per fluidi viscosi, vedi introduzione al capitolo §[ch:bernoulli]{reference-type=>ref> reference=>ch:bernoulli}, l'ipotesi di fluido non viscoso non è direttamente necessaria per ottenere l'equazione di Laplace per il potenziale. L'ipotesi di fluido non viscoso rientra però nel requisito che la corrente sia irrotazionale. L'equazione della vorticità per fluido incomprimibile è

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\zeta},$$

che per un fluido non viscoso, si riduce a

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \quad \frac{D\boldsymbol{\zeta}}{Dt} = (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla)\mathbf{u},$$

dove è stata messa in evidenza la derivata materiale della vorticità, che rappresenta la variazione della vorticità di una particella fluida, che si muove con la velocità del fluido. Se si considera un problema in cui un corpo aerodinamico è investito da una corrente che è uniforme all'infinito a monte, la vorticità all'infinito a monte è nulla: si può dimostrare facilmente allora che $D\boldsymbol{\zeta}/Dt = \mathbf{0}$, e quindi la vorticità si mantiene costante e nulla, sulle linee di corrente che partono dall'infinito a monte². Per correnti ad alto numero di Reynolds attorno a corpi affusolati, nelle quali non si verificano separazioni, gli effetti viscosi e la vorticità sono confinati in strati limite «sottili» attorno ai corpi solidi e in scie «sottili» che si staccano da essi.

È quindi possibile descrivere una corrente di un fluido incomprimibile ad alto numero di Reynolds, all'esterno di queste sottili regioni vorticosi, con un modello di fluido non viscoso. Partendo dalle equazioni di Navier–Stokes che governano la dinamica di un fluido viscoso, per le quali vale la condizione al contorno di adesione a parete ($\mathbf{u} = \mathbf{b}$), si arriva a un modello che permette di calcolare il campo di velocità dal potenziale cinetico, che soddisfa l'equazione di Laplace $\Delta\phi = 0$ nel dominio e la condizione al contorno di non penetrazione ($\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}}$) in corrispondenza delle pareti solide, e in seguito di calcolare la pressione utilizzando il teorema di Bernoulli.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla P = \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}|_{wall} = \mathbf{b} \quad + \text{altre } b.c \end{array} \right. \xrightarrow[\mathbf{u} = \nabla\phi]{\nu = 0, \omega = \mathbf{0}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + P + \chi = C(t) \\ \Delta\phi = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}|_{wall} = \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad + \text{altre } b.c \end{array} \right.$$

Il problema di Laplace è lineare ed è quindi valido il principio di sovrapposizione di cause ed effetti, se la geometria del dominio è fissata. Questa considerazione può sembrare strana, ma è determinata dalla possibile presenza di scie che si distaccano dai corpi solidi e che possono evolvere (per problemi non stazionari) all'interno del dominio. L'equazione di Laplace può rappresentare anche problemi non stazionari, nonostante non compaia esplicitamente nessuna derivata temporale nell'equazione. La dipendenza temporale può comparire all'interno delle condizioni al contorno e la soluzione si adatta immediatamente ad esse. Memoria della soluzione agli istanti di tempo precedenti è contenuta all'interno delle scie, la cui vorticità è legata al valore di circolazione attorno al corpo (e quindi di portanza) e la cui dinamica è determinata dalle equazioni di governo della vorticità.

² È immediato convincersi del fatto, utilizzando la descrizione lagrangiana eqn:bilanci:vorticitàLagrange della vorticità per un fluido non viscoso.

8.1 Theorems about vorticity

8.1.1 Kelvin's theorem

Theorem 8.1.1 (Kelvin's theorem)

In a barotropic or constant density flow, with negligible viscosity effects, the circulation on a material line $\ell(t)$ is constant in time,

$$0 = \frac{d\Gamma_{\ell(t)}}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{\ell(t)} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}}.$$

Proof 1, using time derivative over time dependent domains

Using the expression of the time derivative over a [work line integral](#), over a closed line with no discontinuity in the functions so that $\mathbf{f}(\mathbf{r}_B) \cdot \mathbf{v}_B - \mathbf{f}(\mathbf{r}_A) \cdot \mathbf{v}_A = 0$,

$$\frac{d}{dt} \oint_{\ell(t)} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \oint_{\ell(t)} \partial_t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} + \oint_{\ell(t)} \nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_b \times \hat{\mathbf{t}} = \quad (1)$$

$$= \oint_{\ell(t)} \hat{\mathbf{t}} \cdot \{ \partial_t \mathbf{u} + \omega \times \mathbf{u} \} = \quad (2)$$

$$= \oint_{\ell(t)} \hat{\mathbf{t}} \cdot \left\{ \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right\} = \quad (3)$$

$$= - \oint_{\ell(t)} \hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla \left\{ \nabla \Pi + \nabla \chi + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right\} + \oint_{\ell(t)} \nu \hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} = \quad (4)$$

$$= \oint_{\ell(t)} \nu \hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} = \quad (5)$$

$$= 0 \quad \text{if } \nu = 0,$$

with (1) $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}$ for material lines, and $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$, and using the properties of the mixed vector product $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}$, (2) $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \omega \times \mathbf{u} + \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}$, (3) from the momentum equation $D_t \mathbf{u} = \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla \Pi$, and $\mathbf{g} = -\nabla \chi$, and (4) $\oint_{\ell(t)} \hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla \Phi = \oint_{\ell(t)} d\Phi = 0$.

Proof 2, using material coordinates

8.1.2 Helmholtz's theorems

A **vortex line** is defined as a line everywhere tangent to the vorticity vector field $\omega(\mathbf{r})$. A **vortex tube** is a 3-dimensional region of space with a lateral surface that is delimited by a set of vortex lines, and thus whose normal vector is orthogonal to the vorticity field, $\hat{\mathbf{n}} \cdot \omega = 0$ on S_{lat} . It immediately follows first Helmholtz's theorem.

Theorem 8.1.2 (First Helmholtz's theorem)

The flux of the vorticity field is constant across all the sections of a vortex tube, at a given time.

Proof

As the vorticity is the curl of the velocity field, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, its divergence is identically zero, $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$. Integrating over a volume delimited by the lateral surface of a vortex tube and 2 sections, and applying divergence theorem and the definition of the vortex tube,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \\ &= \oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \\ &= \int_{S_1} \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \boldsymbol{\omega} + \int_{S_2} \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \boldsymbol{\omega} + \underbrace{\int_{S_{lat}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\omega}}_{=0} = \end{aligned}$$

Reversing the unit normal on surface S_1 in order to get an «oriented» vortex tube, with $\hat{\mathbf{n}}|_{S_1} = -\hat{\mathbf{n}}_1$ pointing inward, and $\hat{\mathbf{n}}|_{S_2} = \hat{\mathbf{n}}_2$, the theorem is proved,

$$\int_{S_1} \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \int_{S_2} \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\omega} .$$

Theorem 8.1.3 (Second Helmholtz's theorem)

Vortex lines are material lines.

Proof.

Let's take two points on a vortex line,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) \\ \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(t) + \Delta \ell(t) \hat{\mathbf{t}}(t) + o(\Delta \ell(t)) , \end{aligned}$$

with $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_1(t), t) = \omega(\mathbf{r}_1(t), t) \hat{\mathbf{t}}(t)$. At time $t + \Delta t$, the position of the two material points reads

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t + \Delta t) &= \mathbf{r}_1(t) + \mathbf{u}(\mathbf{r}_1(t), t) \Delta t + o(\Delta t) \\ \mathbf{r}_2(t + \Delta t) &= \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{u}(\mathbf{r}_2(t), t) \Delta t \\ &= \mathbf{r}_2(t) + [\mathbf{u}(\mathbf{r}_1(t), t) + \Delta \mathbf{r}_{12}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}_1(t), t) + o(|\Delta \mathbf{r}_{12}(t)|)] \Delta t + o(\Delta t) , \end{aligned}$$

so that

$$\Delta \mathbf{r}_{12}(t + \Delta t) = \Delta \mathbf{r}_{12}(t) + \Delta \mathbf{r}_{12}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}_1(t), t) \Delta t + o(|\Delta \mathbf{r}_{12}(t)|) \Delta t + o(\Delta t) .$$

Now, using the vorticity equation for inviscid flows

$$D_t \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} ,$$

the vorticity in $\mathbf{r}_1(t + \Delta t)$ at time $t + \Delta t$ is

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_1(t + \Delta t), t + \Delta t) &= \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_1(t), t) + D_t \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_1(t), t) \Delta t + o(\Delta t) = \\ &= \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_1(t), t) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_1(t), t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}_1(t), t) \Delta t + o(\Delta t) . \end{aligned}$$

Comparing the evolution of the material segment $\Delta \mathbf{r}_{12}$ and the vorticity vector in \mathbf{r}_1 , it's immediate to realize that they have the same evolution, namely for $\Delta t \rightarrow 0$

$$d_t \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}_1(t), t) .$$

As a consequence of Helmholtz's theorems, vortex tubes are either closed or start and end at solid surfaces (production/destruction of vorticity, due to viscous term).

todo discuss using vorticity equation

A vortex tube with a section collapsing to zero, can be modeled as a zero section¹, infinite vorticity **vortex filament** ℓ_Γ , so that

$$\lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ |\omega| \rightarrow +\infty}} \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \omega = \Gamma .$$

Vorticity in an irrotational 3-dimensional domain, $\mathbf{r} \in V$, containing a vortex filament, $\mathbf{r}_\Gamma \in \ell_\Gamma$, can be modelled using an impulsive *two-dimensional*² Dirac's delta function

$$\omega(\mathbf{r}, t) = \Gamma(\mathbf{r}_\Gamma, t) \delta_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\Gamma) ,$$

with $\mathbf{r}_\Gamma \in \ell_\Gamma$, and $\Gamma = \Gamma \hat{\mathbf{t}}$, with $\hat{\mathbf{t}}$ the unit vector tangent to the axis of the filament.

Circulation on a line winding once around a vortex filament with intensity Γ reads $\oint_\ell \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \Gamma$.

todo

A **vortex surface** ...

Across a vortex surface the tangential velocity has a jump

$$\Delta \mathbf{u} = \dots$$

8.2 Singularities in Poisson equation

8.2.1 3-dimensional Poisson equation

Green's function reads $\mathbf{G}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$.

Point Source.

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) &= G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) &= \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \end{aligned}$$

having exploited

$$\nabla|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| = \hat{\mathbf{x}}_i \partial_i |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| = \hat{\mathbf{x}}_i \frac{x_i - x_i^0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} .$$

¹ A filament can be cut with a section orthogonal to its axis or with a generic angle w.r.t. it. Orthogonal cut gives the minimum area of the section S_0 , a generic cut with unit normal $\hat{\mathbf{n}}$ gives S so that $S_0 = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{t}} S$.

² The 2-dimensional Dirac's delta $\delta_2(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\Gamma)$ has physical dimensions $[\delta_2] = L^{-2}$, and it gives the value of the function in \mathbf{r}_Γ from the integral on a 2-dimensional surface S , $\int_{\mathbf{r} \in S} f(\mathbf{r}) \delta_2(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\Gamma) = f(\mathbf{r}_\Gamma)$, if $\mathbf{r}_\Gamma \in S$.

Poisson's equation $\nabla^2 \varphi = 0$, for $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$

...

Velocity flux, $\oint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = E_V(\mathbf{r}_0)$

...

Point doublet.

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) &= \hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) &= \dots\end{aligned}$$

Poisson's equation $\nabla^2 \varphi = 0$, for $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$

$$\partial_{ii} (n_k^0 \partial_k G) = n_k^0 \partial_k \partial_{ii} G = 0,$$

for $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$, as $\hat{\mathbf{n}}_0$ is independent from the spatial coordinate \mathbf{r} .

Point vortex.

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \times \hat{\mathbf{t}}_0$$

There's no irrotational point vortex solution. This is somehow linked to vorticity dynamics, and Helmholtz's theorem about vortices: whatever a vortex is, vortices must be either lines or surfaces (either closed or with extreme points on solid boundaries), or a volume distribution of vorticity.

Non-zero vorticity field for point vortices

$$\begin{aligned}\omega &= \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times (\nabla G \times \hat{\mathbf{t}}_0) \\ \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} \partial_l G t_m) &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j (\partial_l G t_m) = \\ &= \partial_m (\partial_i G t_m) - \partial_m (\partial_m G t_i),\end{aligned}$$

with $\hat{\mathbf{t}}_0$ independent from the spatial coordinate \mathbf{r} . Here $\nabla^2 G = 0$, for $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$, and

$$(\hat{\mathbf{t}}_0 \cdot \nabla) \nabla G = \dots \neq \mathbf{0}.$$

Line vortex.

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0 \in \ell_0} \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \times \hat{\mathbf{t}}_0 \Gamma_0,$$

with constant Γ_0 over the vortex line ℓ_0 .

Vorticity field of a line vortex

If ℓ_0 is not closed, ...

If ℓ_0 is closed, (and $\mathbf{r} \notin \ell_0$ so that G is not singular anywhere for $\mathbf{r}_0 \in \ell_0$), the velocity field can be recast as

$$\begin{aligned} \oint_{\mathbf{r}_0 \in \ell_0} \nabla G \times \hat{\mathbf{t}}_0 &= \oint_{\mathbf{r}_0 \in \ell_0} \varepsilon_{ijk} \partial_j G t_k^0 = \\ &= \int_{S_{\ell_0}} n_a^0 \varepsilon_{abk} \partial_b (\varepsilon_{ijk} \partial_j G) = \\ &= \int_{S_{\ell_0}} n_a^0 (\delta_{ia} \delta_{jb} - \delta_{ib} \delta_{ja}) \partial_{bj} G = \\ &= \int_{S_{\ell_0}} n_i^0 \underbrace{\partial_{jj}}_{=0} G - \int_{S_{\ell_0}} n_j^0 \partial_{ji} G = \end{aligned}$$

while the vorticity field is identically **equal to zero** in every point $\mathbf{r} \notin \ell_0$,

$$\begin{aligned} \nabla \times \oint_{\mathbf{r}_0 \in \ell_0} \nabla G \times \hat{\mathbf{t}}_0 &= -\varepsilon_{ijk} \partial_j \int_{S_{\ell_0}} n_l^0 \partial_{lk} G = \\ &= - \int_{S_{\ell_0}} n_l^0 \varepsilon_{ijk} \partial_{ljk} G = \\ &= - \int_{S_{\ell_0}} \hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \nabla \underbrace{(\nabla \times \nabla G)}_{=0} \end{aligned}$$

8.3 Steady Aerodynamics

2-dimensional flows

3-dimensional flows

todo

- Some remarks, using vorticity dynamics:
 - the starting vortex: when were vorticity and circulation generated?
 - vortex intensity of the wake: $\gamma_w(\mathbf{r}_w(\mathbf{r}_T E)) = \Delta \gamma(\mathbf{r}_T E)$, from integral balance of vorticity in a stream-tube (**todo check it and add details**)
 - wake dynamics: transport of vorticity + vortex stretching; using vorticity equation, the shape of the wake $\mathbf{r}_w(\mathbf{r}_T E)$ and its intensity $\gamma(\mathbf{r}_w)$ can be computed (**todo check it and add details**) - or use Helmholtz's vortex theorem + Kelvin's circulation theorem (**todo Add sections in the vorticity dynamics, or add a section here in Aerodynamics chapter, under the assumptions of almost-everywhere irrotational flow and negligible viscosity effects.**)

8.3.1 Mathematical model

$$\begin{aligned} -\Delta\phi &= 0 & \mathbf{r} \in \Omega \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\phi &= 0 & \mathbf{r} \in S_{body} \\ \phi &= \dots & \mathbf{r} \in S_{\infty} \end{aligned}$$

In order to build a domain where the flow is irrotational, wake regions must be cut from the domain: both sides of these regions become part of the boundary of the domain. As shown below, there's no physical wake for 2-dimensional steady flows, while wakes exist in 3-dimensional flows.

8.3.2 Green's function method

Derivation of the Green's function for the Poisson problem

...

Solution.

...

$E(\mathbf{r}_0)$

...

Asymptotic behavior of the perturbation velocity

...

Doublet/vortex equivalence

...

Zero wake vorticity in steady 2-dimensional problems

...

Details in integration by parts on surface in doublet/vortex equivalence

...

Relationship between doublet/vortex distribution and the circulation - 2-dimensional steady problems

...

$$\oint_{\mathbf{r}_0 \in \ell_0} \hat{\mathbf{t}}_0 \times \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$$

...

Asymptotic behavior of the perturbation potential

...

8.3.3 Wake and the shape of the domain

Physical conditions, with jump conditions

No physical wake in 2-dimensional steady flows

Wake in steady 2-dimensional flows

...

8.3.4 Theorems

Kutta-Joukowski theorem

...

Details

...

...

Circulation in Kutta-Joukowski theorem

...

D'Alembert paradox - 2 dimensional flow

...

8.3.5 Steady Aerodynamics - 2-dimensional flows

todo

- Some remarks, using vorticity dynamics:
 - the starting vortex: when were vorticity and circulation generated?
 - vortex intensity of the wake: $\gamma_w(\mathbf{r}_w(\mathbf{r}_T E)) = \Delta\gamma(\mathbf{r}_T E)$, from integral balance of vorticity in a stream-tube (**todo check it and add details**)
 - wake dynamics: transport of vorticity + vortex stretching; using vorticity equation, the shape of the wake $\mathbf{r}_w(\mathbf{r}_T E)$ and its intensity $\gamma(\mathbf{r}_w)$ can be computed (**todo check it and add details**) - or use Helmholtz's vortex theorem + Kelvin's circulation theorem (**todo Add sections in the vorticity dynamics, or add a section here in Aerodynamics chapter, under the assumptions of almost-everywhere irrotational flow and negligibile viscosity effects.**)
-

Mathematical model

$$\begin{aligned} -\Delta\phi &= 0 & \mathbf{r} \in \Omega \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\phi &= 0 & \mathbf{r} \in S_{body} \\ \phi &= \dots & \mathbf{r} \in S_\infty \end{aligned}$$

In order to build a domain where the flow is irrotational, wake regions must be cut from the domain: both sides of these regions become part of the boundary of the domain. As shown below, there's no physical wake for 2-dimensional steady flows, while wakes exist in 3-dimensional flows.

Green's function method

2-dimensional problems

Green's function. Green's function of a 2-dimensional Poisson problem reads

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| .$$

Note! When taking the logarithm of a physical quantity, that quantity must be non-dimensional. Here, the problem must be made non-dimensional, as an example scaling all the lengths with a reference length.

Derivation of the Green’s function for 2-dimensional Poisson problem.

Solutions with spherical symmetry of the Poisson equation in 2-dimensional domains, in the whole domain except for the origin of the coordinates (or the position of the *active* point, \mathbf{r}_0 , as the problem is independent from translation of coordinates under the assumption of homogeneous domain)

$$-\Delta G = \delta(r) .$$

The problem is regular for $r \neq 0$

$$-\Delta G \quad , \quad |\mathbf{r}| \neq 0 ,$$

and it can be solved using the expression of the Laplacian for spherical symmetric scalar fields

$$0 = \frac{1}{r} (rG'(r))' ,$$

and integrating twice

$$G'(r) = \frac{A}{r}$$

$$G(r) = A \ln r + B$$

The additive constant B is set to zero, while the constant A is evaluated by the condition

$$1 = \int_{\Omega} \delta(r) = - \int_{\Omega} \Delta G = - \oint_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla G = - \oint_{C_r} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \partial_r G = - \oint_{C_r} \frac{A}{r} = - \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{A}{r} r d\theta = -2\pi A ,$$

so that $A = -\frac{1}{2\pi}$, and

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| .$$

Solution.

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}_0)\phi(\mathbf{r}_0) &= \int_{\mathbf{r} \in \Omega} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\phi(\mathbf{r}) = \\ &= - \int_{\mathbf{r} \in \Omega} \nabla_{\mathbf{r}}^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)\phi(\mathbf{r}) = \\ &= - \int_{\mathbf{r} \in \Omega} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\nabla_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)\phi(\mathbf{r}) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)\nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r})) - \int_{\mathbf{r} \in \Omega} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \underbrace{\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi(\mathbf{r})}_{=0, \text{ Poisson eq}} = \\ &= - \int_{\mathbf{r} \in \partial\Omega} \{ \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)\phi(\mathbf{r}) - \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r})G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \} . \end{aligned}$$

As shown below, in 2-dimensional steady problems there’s no physical wake, i.e. $\partial\Omega = S_{body} \cup S_{\infty}$, or equivalently on S_w^+ and S_w^- ,

$$0 = \hat{\mathbf{n}}^- \cdot \mathbf{u}^- + \hat{\mathbf{n}}^+ \cdot \mathbf{u}^+ = \dots$$

...

For the perturbation potential, $\varphi := \phi - \phi_{\infty} = \phi - \mathbf{U}_{\infty} \cdot \mathbf{r}$, with $\varphi|_{S_{\infty}} = 0$ (**todo** prove it! And find the trend $\propto r^{\alpha}$)

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}_0)\varphi(\mathbf{r}_0) &= - \int_{\mathbf{r} \in \partial\Omega} \{ \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)\varphi(\mathbf{r}) - \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}\varphi(\mathbf{r})G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \} = \\ &= - \int_{\mathbf{r} \in S_b} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)\varphi(\mathbf{r}) + \int_{\mathbf{r} \in S_b} \underbrace{\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla\varphi(\mathbf{r})}_{=-\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{U}_{\infty}, \text{ from b.c.}} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) + \\ &\quad - \int_{\mathbf{r} \in S_w} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \underbrace{\Delta\varphi(\mathbf{r})}_{=\Delta\varphi_{TE}, \text{ from wake c.}} . \end{aligned}$$

This equation can be recast as an **integro-differential equation** for the perturbation potential on the surface of the body $\mathbf{r}_0 \in S_b$ that can be solved by collocation, as an example using **boundary element methods**. Once this problem is solved, the perturbation potential on S_b is known, and the perturbation potential can be computed in every point of the domain.

$E(\mathbf{r}_0)$

The term $E(\mathbf{r}_0)$ comes from the computation of the integral with the Dirac delta.

$$E(\mathbf{r}_0) = \begin{cases} 1 & \mathbf{r}_0 \in \Omega \\ \frac{1}{2} & \mathbf{r}_0 \in \partial\Omega \\ 0 & \mathbf{r}_0 \notin \Omega \cup \partial\Omega \end{cases}$$

The value $\frac{1}{2}$ is a particular case indeed, if the point \mathbf{r}_0 is on a locally flat - no sharp angles - of the boundary. If the point is at a sharp angle - being θ the angle outside the domain - $E(\mathbf{r}_0) = \frac{\theta}{2\pi}$.

Asymptotic behavior of the perturbation velocity

For $|\mathbf{r}_0| \gg |\mathbf{r}|$, Taylor expansion of the Green's function $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$ and its gradient $\nabla_{\mathbf{r}}G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$ read

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) &\simeq G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} + \mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r}_0| + \mathbf{r} \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|^2} . \\ \nabla_{\mathbf{r}}G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) &\simeq \nabla_{\mathbf{r}}G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} + \mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\mathbf{r}}G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|^2} + \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}_0|^2} + 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0 \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|^4} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_0|^2} + \frac{1}{\pi} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0 \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|^4} . \end{aligned}$$

First and second space derivatives of the Green's function read

$$\begin{aligned} -\nabla_{\mathbf{r}} \ln |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| &= -\hat{\mathbf{x}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ln |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| = \\ &= -\hat{\mathbf{x}}_i \frac{x_i - x_{0,i}}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^2} = \\ &= -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^2} . \\ -\nabla_{\mathbf{r}} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^2} &= -\hat{\mathbf{x}}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\hat{\mathbf{x}}_i \frac{x_i - x_{0,i}}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^2} \right) = \\ &= -\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{x}}_i \left[\frac{\delta_{ij} |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^2 - 2(x_i - x_{0,i})(x_k - x_{0,k})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^4} \right] = \\ &= -\frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^2} \mathbb{I} + 2 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \otimes (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^4} . \end{aligned}$$

Doublet/vortex equivalence

A continuous distribution of doublets over a surface S is equivalent to the sum of a surface distribution of vortices over S and a line distribution of vortices over ∂S . The perturbation potential in $\mathbf{r}_0 \notin S$ generated by a surface distribution of doublets with intensity $\mu(\mathbf{r})$ on S reads

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = \int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) .$$

Exploiting the properties, $\nabla G = -\nabla_0 G$, the potential can be recast as

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = -\nabla_0 \cdot \int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) ,$$

so that the velocity reads

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) &= \nabla_0 \varphi(\mathbf{r}_0) = \\ &= -\nabla_0 \left(\nabla_0 \cdot \int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) \right) = \\ &= -\nabla_0^2 \left(\int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) \right) - \nabla_0 \times \nabla_0 \times \left(\int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) \right) = \\ &= -\nabla_0 \times \nabla_0 \times \left(\int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) \right) = \\ &= -\nabla_0 \times \left(\int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) \right) = \\ &= \nabla_0 \times \psi(\mathbf{r}_0) , \end{aligned}$$

having introduced the definition of vector potential - or stream function - $\psi(\mathbf{r}_0)$, and having used the vector identity, $\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{v}$, and the definition of the Green's function for Poisson equation to see the first integral is identically zero,

$$\begin{aligned} \nabla_0^2 \left(\int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) \right) &= \int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \nabla_0^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) = \\ &= - \int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) = \\ &= \mathbf{0} , \quad \text{for } \mathbf{r}_0 \notin S , \end{aligned}$$

and having exploited the relations $\nabla \times (\mathbf{a}f(\mathbf{r})) = \mathbf{a} \times \nabla f(\mathbf{r})$, $\nabla^2(\mathbf{a}f(\mathbf{r})) = \mathbf{a} \nabla^2 f(\mathbf{r})$, for constant \mathbf{a} .

The expression of the vector potential can be rearranged using integration by parts (be careful about the domain of the functions, and the differential operators. See below),

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}_0) &= - \int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) = \\ &= \int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) = \\ &= \int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \nabla (G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r})) - \int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \nabla^s \mu(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \\ &= \oint_{\mathbf{r} \in \partial S} \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}) \mu(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \nabla^s \mu(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \end{aligned}$$

so that a doublet distribution of intensity μ over surface S is equivalent to the sum of a vortex distribution of intensity $-\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \nabla^s \mu(\mathbf{r})$ over surface S and a vortex distribution of intensity $\mu(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r})$ over the boundary ∂S of the surface, being $\nabla^s \mu(\mathbf{r})$ the *surface gradient*, defined for function on a surface with coordinates q^i , $i = 1 : 2$,

$$\nabla^s f = \mathbf{b}^i \frac{\partial f}{\partial q^i} ,$$

that can be defined for functions defined not only on the surface as the projection of the gradient on the surface,

$$\nabla^s = (\mathbb{1} - \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}) \cdot \nabla ,$$

so that $\nabla^s f = \nabla f - \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla f$.

In the manipulation of the expression of the vector potential, a **vector identity**, see the second of the two useful lemmas in **vector calculus** is used to transform the first integral, in Cartesian components

$$\oint_{\partial S} A t_l = \int_S n_i \varepsilon_{ijk} \partial_j (A \delta_{kl}) = \int_S n_i \varepsilon_{ijl} \partial_j A$$

or in vector formalism

$$\oint_{\partial S} A \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_l = \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla (A \hat{\mathbf{e}}_l) = \int_S \hat{\mathbf{n}} \times \nabla A \cdot \hat{\mathbf{e}}_l ,$$

or, without projecting on the constant unit vector $\hat{\mathbf{e}}_l$ the first and the last expressions,

$$\oint_{\partial S} A \hat{\mathbf{t}} = \int_S \hat{\mathbf{n}} \times \nabla A .$$

The perturbation velocity is retrieved from the vector potential as $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0) = \nabla_0 \times \psi(\mathbf{r}_0)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(\mathbf{r}_0) &= \nabla_0 \times \psi(\mathbf{r}_0) = \\ &= \nabla_0 \times \left[\oint_{\mathbf{r} \in \partial S} \mu(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \nabla^s \mu(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \right] = \\ &= \\ &= \oint_{\mathbf{r} \in \partial S} \mu(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}) \times \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r} \in S} [\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \nabla^s \mu(\mathbf{r})] \times \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) . \end{aligned}$$

Zero wake vorticity in steady 2-dimensional problems

As the potential jump across the wake in steady 2-dimensional problem is uniform along the wake, $\mu^w = \Delta\varphi^w$, then $\nabla^s \mu^w = \mathbf{0}$ and

$$\gamma^w = \mathbf{0} .$$

Details in integration by parts on surface in doublet/vortex equivalence

todo Using surface coordinates, a surface nabla seamlessly appears

Relationship between doublet/vortex distribution and the circulation - 2-dimensional steady problems

In 2-dimensional steady problems there's no physical wake - no velocity discontinuities, zero vorticity intensity, $\gamma(\mathbf{r}^w) = \mathbf{0}$. For closed surfaces $|\partial S_b| = 0$, and thus the velocity field reads (with the unit normal vector pointing into the fluid domain, reversed w.r.t. the original expression at the beginning of this section),

$$\mathbf{u}'(\mathbf{r}_0) = \int_{\mathbf{r} \in S_b} \gamma(\mathbf{r}) \times \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) + \int_{\mathbf{r} \in S_b} \sigma(\mathbf{r}_0) \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) ,$$

having defined vortex intensity $\gamma(\mathbf{r}) := -\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \mu(\mathbf{r})$, and the source intensity $\sigma(\mathbf{r}) := \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \varphi(\mathbf{r})$.

Circulation along a line ℓ_0 is defined as

$$\Gamma_{\ell_0} = \oint_{\ell_0} \mathbf{u}'(\mathbf{r}_0) \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}_0) ,$$

Focusing on 2-dimensional problems, the surface S_b becomes a line ℓ_b . Let's deal here with closed surfaces: thus the integral over closed surface (line, in 2D) ℓ_b becomes \oint_{ℓ_b} . The contribution to circulation of the source term is identically zero, as

$$\begin{aligned} \Gamma_{\ell_0}^{\sigma} &= \oint_{\mathbf{r}_0 \in \ell_0} \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}_0) \cdot \oint_{\mathbf{r} \in \ell_b} \sigma(\mathbf{r}) \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \\ &= \oint_{\mathbf{r} \in \ell_b} \sigma(\mathbf{r}) \oint_{\mathbf{r}_0 \in \ell_0} \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \\ &= \oint_{\mathbf{r} \in \ell_b} \sigma(\mathbf{r}) \oint_{\mathbf{r}_0 \in \ell_0} d_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Thus, the contribution to circulation comes from vortex term only. Manipulating this contribution, it's possible to get an expression for the circulation as a function of the vortex intensity,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\ell_0} &= \Gamma_{\ell_0}^{\gamma} = \oint_{\mathbf{r}_0 \in \ell_0} \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}_0) \cdot \oint_{\mathbf{r} \in \ell_b} \gamma(\mathbf{r}) \times \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \\ &= - \oint_{\mathbf{r} \in \ell_b} \gamma(\mathbf{r}) \cdot \oint_{\mathbf{r}_0 \in \ell_0} \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}_0) \times \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \end{aligned}$$

The integral over ℓ_0 is equal to $-\hat{\mathbf{z}}$ (see below), and thus

$$\Gamma_{\ell_0} = \oint_{\mathbf{r} \in \ell_b} \gamma_z(\mathbf{r}) .$$

$$\oint_{\mathbf{r}_0 \in \ell_0} \hat{\mathbf{t}}_0 \times \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$$

Method 1 - Using Green's lemma. In a 2-dimensional plane, using Cartesian coordinates, $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$, and **Green's lemma** in the plane on a **simple domain**, the integral becomes

$$\begin{aligned} \oint_{\mathbf{r} \in \ell} \hat{\mathbf{t}} \times \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) &= \hat{\mathbf{z}} \oint_{\mathbf{r} \in \ell} \{t_x \partial_y G - t_y \partial_x G\} = \quad (\text{Green's lemma}) \\ &= -\hat{\mathbf{z}} \int_{\mathbf{r} \in S_{\ell}} \{\partial_{yy} G + \partial_{xx} G\} = \\ &= -\hat{\mathbf{z}} \int_{\mathbf{r} \in S_{\ell}} \nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \\ &= 0 , \end{aligned}$$

if the singular point \mathbf{r}_0 of $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$ is outside S_{ℓ} , as $-\nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, and $\int_{\mathbf{r} \in S_{\ell}} \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) f(\mathbf{r}) = E_{S_{\ell}}(\mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}_0)$.

In a **non-simply connected domain**, it's possible to introduce a cut in the domain. If the cut is geometrical and not physical - i.e. w/o any discontinuity of the functions across it -, the value of the integral is independent from the path, given a path winding around the hole in the domain the same number of times (**todo** Add a link to some materia in (Not so) *Mathematics Basics*),

$$\oint_{\mathbf{r} \in \ell_1} \hat{\mathbf{t}} \times \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \oint_{\mathbf{r} \in \ell_2} \hat{\mathbf{t}} \times \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) .$$

Exploiting this path-independence, the value of the integral can be evaluated on a circle enclosing \mathbf{r}_0 ,

$$\begin{aligned} \oint_{\mathbf{r} \in \ell_1} \hat{\mathbf{t}} \times \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) &= \oint_{\mathbf{r} \in C} \hat{\mathbf{t}} \times \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \hat{\boldsymbol{\theta}} \times \frac{1}{2\pi} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|} |\mathbf{r}| d\theta = \\ &= -\hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

Asymptotic behavior of the perturbation potential

For $|\mathbf{r}_0| \gg |\mathbf{r}|$, using Taylor expansion of the Green's function $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$ and its gradient $\nabla_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$, the perturbation velocity reads

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(\mathbf{r}_0) &= \int_{\mathbf{r} \in S_b} \gamma(\mathbf{r}) \times \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) + \int_{\mathbf{r} \in S_b} \sigma(\mathbf{r}) \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \\ &\simeq \int_{\mathbf{r} \in S_b} \gamma(\mathbf{r}) \times \left[\frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|^2} - \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}_0|^2} + \frac{1}{\pi} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|^4} \right] + \\ &\quad + \int_{\mathbf{r} \in S_b} \sigma(\mathbf{r}) \left[\frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|^2} - \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}_0|^2} + \frac{1}{\pi} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|^4} \right]. \end{aligned}$$

The first term in the second integral is proportional to the mass flux $\dot{m} = \int_{\mathbf{r} \in S_b} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \varphi = \int_{\mathbf{r} \in S_b} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}$ across S_b , and so it's identically zero if $\dot{m} = 0$, as in the case of solid boundaries. The first term in the first integral is proportional to the «vector» circulation $\Gamma = \Gamma \hat{\mathbf{z}} = \oint_{\mathbf{r} \in \partial S_b} \gamma(\mathbf{r})$ (**todo Prove it**), thus the asymptotic behavior of the perturbation velocity as $|\mathbf{r}_0| \gg |\mathbf{r}|$ reads

$$\mathbf{u}'(\mathbf{r}_0) \simeq \frac{1}{2\pi} \Gamma \times \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|^2} + \frac{1}{2\pi} \dot{m} \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|^2} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{r}_0|^2}\right)$$

3-dimensional problems

Green's function Green's function of a 3-dimensional Poisson problem reads

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}.$$

Solution

Wake and the shape of the domain

Physical conditions, with jump conditions

No physical wake in 2-dimensional steady flows

Wake in steady 2-dimensional flows

In 2-dimensional steady flows there's no physical wake, i.e. there's no jump in physical quantities like velocity or pressure across it. Anyways, for lifting bodies, for which $\Gamma \neq 0$ (see Kutta-Joukowski theorem), there's the need to introduce a cut/branch in the domain in order to get a single-valued potential function φ .

...

Evaluating the circulation along a path winding around the airfoil, expressing the perturbation velocity as the gradient of the perturbation potential, a relation between the circulation and the potential jump across the wake is readily found

$$\Gamma = \oint_{\ell} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \oint_{\ell} \hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla \varphi = \int_{w^+}^{w^-} d\varphi = \varphi_{w^+} - \varphi_{w^-} = \Delta\varphi_w .$$

Theorems

Kutta-Joukowski theorem

2-dimensional flows. Circulation along a path γ is defined as the integral

$$\Gamma = \oint_{\gamma} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} .$$

Let's define here a circulation vector $\hat{\Gamma} = \Gamma \hat{\mathbf{z}}$, with $\hat{\mathbf{z}}$ orthogonal w.r.t. the plane of the 2-dimensional flow.

Using integral *balance equations* of mass and momentum

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho + \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \int_V \rho \mathbf{g} + \oint_{\partial V} \mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}} , \end{aligned}$$

under the assumptions of steady flow and control volume, $\frac{d}{dt} \equiv 0$ and $\mathbf{u}^{rel} = \mathbf{u}$, negligible volume force « $\mathbf{g} \sim \mathbf{0}$ », and negligible viscous stress, $\mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}} = -p\hat{\mathbf{n}}$, and rearranging the surface integrals of stress to get the force \mathbf{F} acting on solid body S_b , it follows

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= -\mathbf{F} + \oint_{S_{\infty}} \mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}} . \end{aligned}$$

Details

...

The velocity field as the sum of the free-stream velocity and the perturbation velocity,

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_{\infty} + \mathbf{u}' = \mathbf{U}_{\infty} + \nabla \varphi .$$

Under the additional assumption of uniform free-stream velocity, zero vorticity follows and the second *Bernoulli theorem* holds,

$$\begin{aligned} P_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 &= P + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 = \\ &= P + \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 + \rho \mathbf{U}_{\infty} \cdot \mathbf{u}' + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}'|^2 , \end{aligned}$$

being P , \mathbf{u} the pressure and velocity in any point of the fluid that is reached by a streamline coming from the free-stream. The expression of the aerodynamic force acting on the body can be recast as

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= - \oint_{S_\infty} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_\infty} P \hat{\mathbf{n}} = \\
 &= - \underbrace{\oint_{S_\infty} \rho \mathbf{U}_\infty \mathbf{U}_\infty \cdot \hat{\mathbf{n}}}_{=0, \oint_S \text{const} \cdot \hat{\mathbf{n}}=0} - \underbrace{\oint_{S_\infty} \rho \mathbf{U}_\infty \mathbf{u}' \cdot \hat{\mathbf{n}}}_{=0, \text{from mass balance}} - \underbrace{\oint_{S_\infty} \rho \mathbf{u}' \mathbf{U}_\infty \cdot \hat{\mathbf{n}}}_{\rightarrow 0 \text{ as } |S_\infty| \rightarrow \infty} - \underbrace{\oint_{S_\infty} \rho \mathbf{u}' \mathbf{u}' \cdot \hat{\mathbf{n}}}_{\rightarrow 0 \text{ as } |S_\infty| \rightarrow \infty} - \oint_{S_\infty} P \hat{\mathbf{n}} = \\
 &\simeq - \oint_{S_\infty} \rho \mathbf{u}' \mathbf{U}_\infty \cdot \hat{\mathbf{n}} - \underbrace{\oint_{S_\infty} P_\infty \hat{\mathbf{n}}}_{=0, \oint_S \hat{\mathbf{n}}=0} + \oint_{S_\infty} \rho \mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{u}' \hat{\mathbf{n}} + \underbrace{\oint_{S_\infty} \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}'|^2 \hat{\mathbf{n}}}_{\rightarrow 0 \text{ as } |S_\infty| \rightarrow \infty} = \\
 &\simeq - \rho \mathbf{U}_\infty \cdot \oint_{S_\infty} (\hat{\mathbf{n}} \mathbf{u}' - \mathbf{u}' \hat{\mathbf{n}}) = \\
 &= \rho \mathbf{U}_\infty \times \Gamma .
 \end{aligned}$$

Circulation in Kutta-Joukowski theorem

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_\infty \times \Gamma &= \mathbf{U}_\infty \times \hat{\mathbf{z}} \oint_S \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \\
 &= \mathbf{U}_\infty \times \hat{\mathbf{z}} \oint_S (\mathbf{U}_\infty + \mathbf{u}') \cdot \hat{\mathbf{t}} = \\
 &= \mathbf{U}_\infty \times \hat{\mathbf{z}} \oint_S \mathbf{u}' \cdot \hat{\mathbf{t}} = \\
 &= \mathbf{U}_\infty \times \hat{\mathbf{z}} \oint_S \mathbf{u}' \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{n}}) ,
 \end{aligned}$$

Using a Cartesian basis, the i^{th} component of the vector reads

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{U}_\infty \times \Gamma\}_i &= \varepsilon_{ijk} U_j \delta_{kz} \oint_S u'_l \varepsilon_{lpq} \delta_{zp} n_q = \\
 &= \varepsilon_{ijz} \varepsilon_{qlz} U_j \oint_S u'_l n_q = \\
 &= (\delta_{iq} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jq}) U_j \oint_S u'_l n_q = \\
 &= U_j \oint_S (u'_j n_i - n_j u'_i) = \\
 &= \left\{ -\mathbf{U}_\infty \cdot \oint_S (\hat{\mathbf{n}} \mathbf{u}' - \mathbf{u}' \hat{\mathbf{n}}) \right\}_i .
 \end{aligned}$$

having used the properties of the Ricci symbols, $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki}$, and the identity $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$.

D'Alembert paradox - 2 dimensional flow

Lift and drag are defined as the components of the aerodynamic force orthogonal and parallel to the free-stream velocity $\mathbf{U}_\infty = U_\infty \hat{\mathbf{x}}$. Being \mathbf{F} the aerodynamic force acting on the body,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \rho \mathbf{U}_\infty \times \Gamma = \\ &= \rho (U_\infty \hat{\mathbf{x}}) \times (\Gamma \hat{\mathbf{z}}) = \\ &= -\rho U_\infty \Gamma \hat{\mathbf{y}}, \end{aligned}$$

the lift and drag are

$$\begin{aligned} L &= F_y = -\rho U_\infty \Gamma \quad (\text{Kutta-Joukowski theorem}) \\ D &= F_x = 0 \quad (\text{D'Alembert paradox}). \end{aligned}$$

8.3.6 Steady Aerodynamics - 3-dimensional flows

todo

- Some remarks, using vorticity dynamics:
 - the starting vortex: when were vorticity and circulation generated?
 - vortex intensity of the wake: $\gamma_w(\mathbf{r}_w(\mathbf{r}_{TE})) = \Delta\gamma(\mathbf{r}_{TE})$, from integral balance of vorticity in a stream-tube (**todo check it and add details**)
 - wake dynamics: transport of vorticity + vortex stretching; using vorticity equation, the shape of the wake $\mathbf{r}_w(\mathbf{r}_{TE})$ and its intensity $\gamma(\mathbf{r}_w)$ can be computed (**todo check it and add details**) - or use Helmholtz's vortex theorem + Kelvin's circulation theorem (**todo Add sections in the vorticity dynamics, or add a section here in Aerodynamics chapter, under the assumptions of almost-everywhere irrotational flow and negligible viscosity effects.**)

See `steady-aerodynamics-3d.md.bak` file for the old version of these notes.

Mathematical model

The governing equations of incompressible flows with negligible viscosity and almost everywhere irrotational can be recast as a Laplace equation, supplemented with the proper boundary conditions. In this model, the thin regions of the space where vorticity is non-negligible - namely boundary layers and wakes - need to be cut-out from the domain of the mathematical problem: boundary layers coincide with surfaces of solid bodies, while additional cuts must be introduced in the domain to represent wakes. These regions are represented by a (double-layer of) doublets or - by the doublet/vortex analogy - vortices. As shown in the section about *singularities in incompressible aerodynamics* **todo**, the potential is discontinuous across layers of doublets, the normal component of the velocity is continuous (for jump conditions), and the jump in tangential velocity can be related to the intensity of the vortex sheet, $\Delta\mathbf{u} = -\hat{\mathbf{n}} \times \gamma$.

Let the velocity field be $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \nabla\phi(\mathbf{r})$ in the regions where the flow is irrotational, the governing equation and the no-penetration boundary conditions on surface of solid bodies at rest read

$$\begin{aligned} -\Delta\phi &= 0 \quad \mathbf{r} \in \Omega \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\phi &= 0 \quad \mathbf{r} \in S_{body} \end{aligned}$$

In order to build a domain where the flow is irrotational, wake regions must be cut from the domain: both sides of these regions become part of the boundary of the domain. In an open domain, the boundary of the domain of the mathematical

problem for the kinetic potential is the set union of body boundaries S_b , wakes sides S_{w^+}, S_{w^-} , and a surface at the infinity S_∞ ,

$$\partial\Omega = S_b \cup S_{w^+} \cup S_{w^-} \cup S_\infty .$$

Boundary conditions at the *wakes* follow from **jump conditions** of mass and momentum across a wake, the balance of vorticity at trailing edges (**Kutta condition**) and the **transport of vorticity**, resulting from Helmholtz's theorems. Boundary conditions at the boundary **at the infinity** S_∞ follow from the **asymptotic behavior** of the fields generated by *singularities*.

Usually the problem is written in terms of perturbation potential $\varphi(\mathbf{r})$, separating the effects of bodies and wakes from the free-stream flow,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}) &= \mathbf{U}_\infty + \mathbf{u}'(\mathbf{r}) \\ \phi(\mathbf{r}) &= \mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{r} + \varphi(\mathbf{r}) , \end{aligned}$$

so that Laplace equation and boundary conditions on S_{body} read

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi &= 0 & \mathbf{r} \in \Omega \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\varphi &= -\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{U}_\infty & \mathbf{r} \in S_{body} \end{aligned}$$

Green's function method, for solving Poisson equations

Poisson equations can be recast as *boundary problem* and solved with a *boundary element method*, e.g. exploiting Green's function properties. The Green's function of a 3-dimensional Poisson problem reads

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} ,$$

so that the integral boundary value problems read

$$E(\mathbf{r}_0)\varphi(\mathbf{r}_0) = - \oint_{\partial V} \{ \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \varphi(\mathbf{r}) - \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla\varphi(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \}$$

The volume contribution of vorticity field is a function of the vorticity on the body **todo see wake**. *Discuss and add details about this statement. For a given shape of the wake, the problem is linear: only the vorticity field, related to the stream function with linear dependence, is unknown; for a free-wake the problem becomes non-linear, as the shape of the wake - i.e. the position of its points - is unknown: this makes the problem non-linear, as the shape of the wake is determined by the condition of not-loaded wake.*

$E(\mathbf{r}_0)$

The term $E(\mathbf{r}_0)$ comes from the computation of the integral with the Dirac delta.

$$E(\mathbf{r}_0) = \begin{cases} 1 & \mathbf{r}_0 \in \Omega \\ \frac{1}{2} & \mathbf{r}_0 \in \partial\Omega \\ 0 & \mathbf{r}_0 \notin \Omega \cup \partial\Omega \end{cases}$$

The value $\frac{1}{2}$ is a particular case indeed, if the point \mathbf{r}_0 is on a locally flat - no sharp angles - of the boundary. If the point is at a sharp angle - being Θ the solid angle outside the domain - $E(\mathbf{r}_0) = \frac{\Theta}{4\pi}$.

Using the boundary conditions on S_b , wake conditions on the S_{w^+} and S_{w^-} - collapsed in a single surface with normal pointing in the same direction of S_{w^+} - and asymptotic conditions on S_∞ , the problem is recast as an integro-differential problem with unknown value of the potential $\varphi(\mathbf{r})$ on¹ the surface of the body S_b ,

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}_0)\varphi(\mathbf{r}_0) + \int_{S_b} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)\varphi(\mathbf{r}) &= \\ = - \int_{S_b} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{U}_\infty G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) - \int_{S_w} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)\Delta\varphi_w, \end{aligned}$$

being the contributions on S_∞ equal to zero, and the jump of the potential across the wake a function of the jump at the trailing edge where the vortex line of the wake originates

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}_w) = \Delta\varphi(\mathbf{r}_{TE}(\mathbf{r}_w)).$$

Mathematical problem: prescribed wake. If the shape of the wake is known, the problem can thus be recast as a linear problem

$$E(\mathbf{r}_0)\varphi(\mathbf{r}_0) + \int_{\mathbf{r} \in S_b} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)\varphi(\mathbf{r}) + \int_{\mathbf{r}_w \in S_w} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)\Delta\varphi(\mathbf{r}_{TE}(\mathbf{r}_w)) = - \int_{\mathbf{r} \in S_b} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{U}_\infty G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0),$$

or in a discrete form

$$[\mathbf{E} - \mathbf{D}_{bb} - \mathbf{D}_{bw}\mathbf{T}_{wb}] \varphi_b = \mathbf{S}_{bb}\sigma_b,$$

being \mathbf{E} a multiple of the identity matrix, \mathbf{D}_{bb} the matrix containing the influence coefficients of body doublets on body collocation points, \mathbf{D}_{bw} the matrix containing the IC of the wake doubles on body collocation points, \mathbf{T}_{wb} the connectivity matrix relating the intensity of the wake to the jump of potential at the trailing edge, \mathbf{S}_{bb} the matrix containing the influence coefficients of body sources on body collocation points, with $\{\sigma_b\}_i = -\hat{\mathbf{n}}_i \cdot \mathbf{U}_\infty$ the intensity of the body sources.

Mathematical problem: free wake. If the shape of the wake is unknown, the problem above must be supplemented with the conditions of not-loaded wake $\mathbf{u}(\mathbf{r}_w) \times \gamma(\mathbf{r}_w) = \mathbf{0}$. The problem becomes non-linear, so an iterative method is required.

Note. The problem is usually solved numerically by collocation. As the intensity of a vortex line - or a section of the vortex sheet representing the wake - is determined by a balance of vorticity at the trailing edge, only 2 components of the vector are effectively free. The transport of the wake occurs with the mean velocity $\mathbf{u}(\mathbf{r}_w)$, and this velocity is aligned with the intensity of the vortex sheet $\gamma(\mathbf{r}_w) \parallel \mathbf{u}(\mathbf{r}_w)$. Being the free-stream velocity $\mathbf{U}_\infty = U_\infty \hat{\mathbf{x}}$, the shape of the wake can be determined by the coordinates (y_w, z_w) of the points of the wake on different planes with given values of x_w .

Once the problem is solved and the potential $\varphi(\mathbf{r})$ is known on solid surfaces $\mathbf{r} \in S_b$ - and the shape of the wake, if unknown - it's possible to retrieve the value of the potential and the velocity field in every point \mathbf{r}_0 of the domain,

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}_0) &= \int_{S_b} \sigma(\mathbf{r})G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) - \int_{S_b} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)\varphi(\mathbf{r}) - \int_{S_w} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)\Delta\varphi_w \\ \mathbf{u}'(\mathbf{r}_0) &= \nabla_0 \varphi(\mathbf{r}_0) = \\ &= \nabla_0 \left\{ \int_{S_b} \sigma(\mathbf{r})G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) - \int_{S_b} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)\varphi(\mathbf{r}) - \int_{S_w} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)\Delta\varphi_w \right\} = \\ &= \int_{S_b} \sigma(\mathbf{r})\nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) - \nabla_0 \int_{S_b} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)\varphi(\mathbf{r}) - \int_{S_w} \gamma(\mathbf{r}) \times \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0), \end{aligned}$$

having used the doublet/vortex analogy, where the line contributions are zero - (a) contributions at trailing edge of the body and the wake are opposite, (b) intensity of a wake goes to zero at its lateral boundaries, (c) **todo** what's the contribution of the starting vortex? is the starting vortex part of the domain? *Discuss*

¹ What does the value of the potential on a surface doublet mean, when it's not continuous there? Different equivalent approaches can be used. It's possible to take a point (a) «just above» the surface, s.t. $E(\mathbf{r}_0) = 1$ and the singular part of the doublet integral reads $\frac{1}{2}\varphi(\mathbf{r}_0)$, (b) «just below» the surface s.t. $E(\mathbf{r}_0) = 0$ and the singular part of the doublet integral reads $-\frac{1}{2}\varphi(\mathbf{r}_0)$, or (c) «on» the surface s.t. $E(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2}$ and the singular part of the doublet integral reads 0 by regularization.

Asymptotic behavior of the Green's function - todo: move to section about singularities

For $|\mathbf{r}_0| \gg |\mathbf{r}|$, Taylor expansion of the Green's function $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$ and its gradient $\nabla_{\mathbf{r}}G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$ read

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) &\simeq G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} + \mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}_0|} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|^3} . \\ \nabla_{\mathbf{r}}G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) &\simeq \nabla_{\mathbf{r}}G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} + \mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\mathbf{r}}G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|^3} + \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}_0|^3} + 3\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0 \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|^5} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_0|^3} + \frac{3}{4\pi} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0 \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|^5} . \end{aligned}$$

First and second space derivatives of the Green's function read

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}}|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^{-1} &= \hat{\mathbf{x}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^{-1} = \\ &= -\hat{\mathbf{x}}_i \frac{x_i - x_{0,i}}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} = \\ &= -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} . \\ -\nabla_{\mathbf{r}} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} &= -\hat{\mathbf{x}}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\hat{\mathbf{x}}_i \frac{x_i - x_{0,i}}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} \right) = \\ &= -\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{x}}_i \left[\frac{\delta_{ij} |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3 - 3(x_i - x_{0,i})(x_k - x_{0,k}) |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^6} \right] = \\ &= -\frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} \mathbb{1} + 3 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \otimes (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^5} . \end{aligned}$$

Doublet/vortex equivalence

A continuous distribution of doublets over a surface S is equivalent to the sum of a surface distribution of vortices over S and a line distribution of vortices over ∂S . The perturbation potential in $\mathbf{r}_0 \notin S$ generated by a surface distribution of doublets with intensity $\mu(\mathbf{r})$ on S reads

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = \int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) .$$

Exploiting the properties, $\nabla G = -\nabla_0 G$, the potential can be recast as

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = -\nabla_0 \cdot \int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) ,$$

so that the velocity reads

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) &= \nabla_0 \varphi(\mathbf{r}_0) = \\
 &= -\nabla_0 \left(\nabla_0 \cdot \int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) \right) = \\
 &= -\nabla_0^2 \left(\int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) \right) - \nabla_0 \times \nabla_0 \times \left(\int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) \right) = \\
 &= -\nabla_0 \times \nabla_0 \times \left(\int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) \right) = \\
 &= -\nabla_0 \times \left(\int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) \right) = \\
 &= \nabla_0 \times \psi(\mathbf{r}_0),
 \end{aligned}$$

having introduced the definition of vector potential - or stream function - $\psi(\mathbf{r}_0)$, and having used the vector identity, $\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{v}$, and the definition of the Green's function for Poisson equation to see the first integral is identically zero,

$$\begin{aligned}
 \nabla_0^2 \left(\int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) \right) &= \int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \nabla_0^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) = \\
 &= - \int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) = \\
 &= \mathbf{0}, \quad \text{for } \mathbf{r}_0 \notin S,
 \end{aligned}$$

and having exploited the relations $\nabla \times (\mathbf{a}f(\mathbf{r})) = \mathbf{a} \times \nabla f(\mathbf{r})$, $\nabla^2(\mathbf{a}f(\mathbf{r})) = \mathbf{a} \nabla^2 f(\mathbf{r})$, for constant \mathbf{a} .

The expression of the vector potential can be rearranged using integration by parts (be careful about the domain of the functions, and the differential operators. See below),

$$\begin{aligned}
 \psi(\mathbf{r}_0) &= - \int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) = \\
 &= \int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r}) = \\
 &= \int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \nabla (G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mu(\mathbf{r})) - \int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \nabla^s \mu(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \\
 &= \oint_{\mathbf{r} \in \partial S} \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}) \mu(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \nabla^s \mu(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) =
 \end{aligned}$$

so that a doublet distribution of intensity μ over surface S is equivalent to the sum of a vortex distribution of intensity $-\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \nabla^s \mu(\mathbf{r})$ over surface S and a vortex distribution of intensity $\mu(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r})$ over the boundary ∂S of the surface, being $\nabla^s \mu(\mathbf{r})$ the *surface gradient*, defined for function on a surface with coordinates q^i , $i = 1 : 2$,

$$\nabla^s f = \mathbf{b}^i \frac{\partial f}{\partial q^i},$$

that can be defined for functions defined not only on the surface as the projection of the gradient on the surface,

$$\nabla^s = (\mathbb{1} - \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}) \cdot \nabla,$$

so that $\nabla^s f = \nabla f - \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla f$.

In the manipulation of the expression of the vector potential, a [vector identity](#), see the second of the two useful lemmas in [vector calculus](#) is used to transform the first integral, in Cartesian components

$$\oint_{\partial S} A t_l = \int_S n_i \varepsilon_{ijk} \partial_j (A \delta_{kl}) = \int_S n_i \varepsilon_{ijl} \partial_j A$$

or in vector formalism

$$\oint_{\partial S} A \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_l = \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla(A \hat{\mathbf{e}}_l) = \int_S \hat{\mathbf{n}} \times \nabla A \cdot \hat{\mathbf{e}}_l,$$

or, without projecting on the constant unit vector $\hat{\mathbf{e}}_l$ the first and the last expressions,

$$\oint_{\partial S} A \hat{\mathbf{t}} = \int_S \hat{\mathbf{n}} \times \nabla A.$$

The perturbation velocity is retrieved from the vector potential as $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0) = \nabla_0 \times \psi(\mathbf{r}_0)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(\mathbf{r}_0) &= \nabla_0 \times \psi(\mathbf{r}_0) = \\ &= \nabla_0 \times \left[\oint_{\mathbf{r} \in \partial S} \mu(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r} \in S} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \nabla^s \mu(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \right] = \\ &= \\ &= \oint_{\mathbf{r} \in \partial S} \mu(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}) \times \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r} \in S} [\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \nabla^s \mu(\mathbf{r})] \times \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0). \end{aligned}$$

Vorticity field from the velocity field - (todo? Trash?)

Given the velocity field

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_0) = \nabla_0 \times \psi(\mathbf{r}_0) + \nabla_0 \varphi(\mathbf{r}_0),$$

the vorticity field reads

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{r}_0) &= \nabla_0 \times \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) = \\ &= \nabla_0 \times [\nabla_0 \times \psi(\mathbf{r}_0) + \nabla_0 \varphi(\mathbf{r}_0)] = \\ &= \nabla_0 \times (\nabla_0 \times \psi(\mathbf{r}_0)) = \\ &= \nabla_0 (\nabla_0 \cdot \psi(\mathbf{r}_0)) - \nabla_0^2 \psi(\mathbf{r}_0), \end{aligned}$$

with the vector identity $\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{v}$. With uniform free-stream the vorticity can be evaluated using perturbation velocity,

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{r}_0) &= \nabla_0 \times \mathbf{u}_\gamma(\mathbf{r}_0) = \\ &= \nabla_0 \times \left[\oint_{\mathbf{r} \in \partial S_{b,w,\infty}} \mu(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}) \times \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r} \in S_{b,w,\infty}} [\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \nabla^s \mu(\mathbf{r})] \times \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \right] = \\ &= \nabla_0 \times \left[\oint_{\mathbf{r} \in \partial S_{b,w,\infty}} \Gamma(\mathbf{r}) \times \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) + \int_{\mathbf{r} \in S_{b,w,\infty}} \gamma(\mathbf{r}) \times \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \right] = \end{aligned}$$

todo Provide the meaning of Γ , γ as (impulsive) vorticity distribution on lines and surfaces, using

- identity

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{a} \times \nabla f(\mathbf{r})) &= \hat{\mathbf{x}}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} a_l \partial_m f = \\ &= \hat{\mathbf{x}}_i (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_l \partial_j f = \\ &= \hat{\mathbf{x}}_i (a_i \partial_{ll} f - a_l \partial_{il} f) = \\ &= \mathbf{a} \nabla^2 f(\mathbf{r}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \nabla f(\mathbf{r}) = \\ &= \mathbf{a} \nabla^2 f(\mathbf{r}) - \nabla(\mathbf{a} \cdot \nabla f(\mathbf{r})), \end{aligned}$$

for \mathbf{a} constant.

- $-\nabla_0^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$
- ...

$$\begin{aligned} \nabla_0 \cdot (\nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)) &= \frac{\partial}{\partial x_i^0} \left[\frac{x_i - x_i^0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right] = \\ &= \frac{-3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} + 3 \frac{(x_i - x_i^0)(x_i - x_i^0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^5} = 0, \end{aligned}$$

when $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$.

- ...

$$\begin{aligned} 4\pi \nabla_0 (\mathbf{a} \cdot \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)) &= \nabla_0 \left(\mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right) = \\ &= \hat{\mathbf{x}}_i^0 \frac{\partial}{\partial x_i^0} \left[\frac{a_k (x_k - x_k^0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right] = \\ &= \hat{\mathbf{x}}_i^0 \left[\frac{-a_k \delta_{ik}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} + 3 \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)(x_i - x_i^0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^5} \right] = \end{aligned}$$

$\oint_{\mathbf{r}_0 \in \ell_0} \hat{\mathbf{t}}_0 \times \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) - \text{(todo? Trash?)}$

...

Asymptotic behavior of the perturbation potential

Body. For $|\mathbf{r}_0| \gg |\mathbf{r}|$, using Taylor expansion of the Green's function $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$ and its gradient $\nabla_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$, the contribution of the body to perturbation velocity reads

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_b(\mathbf{r}_0) &= \int_{\mathbf{r} \in S_b} \gamma(\mathbf{r}) \times \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) + \int_{\mathbf{r} \in S_b} \sigma(\mathbf{r}) \nabla_0 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \\ &\simeq \int_{\mathbf{r} \in S_b} \gamma(\mathbf{r}) \times \left[\frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|^3} - \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}_0|^3} + \frac{3}{4\pi} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|^5} \right] + \\ &\quad + \int_{\mathbf{r} \in S_b} \sigma(\mathbf{r}) \left[\frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|^3} - \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}_0|^3} + \frac{3}{4\pi} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|^5} \right]. \end{aligned}$$

The first term in the second integral is proportional to the mass flux $\dot{m} = \int_{\mathbf{r} \in S_b} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \varphi = \int_{\mathbf{r} \in S_b} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}$ across S_b , and so it's identically zero if $\dot{m} = 0$, as in the case of solid boundaries. The asymptotic behavior of the perturbation velocity due to the body as $|\mathbf{r}_0| \gg |\mathbf{r}|$ reads

$$\mathbf{u}'_b(\mathbf{r}_0) \simeq \frac{1}{4\pi} \Gamma \times \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|^3} + \frac{1}{4\pi} \dot{m} \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|^3} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{r}_0|^3}\right)$$

Wake.

Wake and the shape of the domain

Jump conditions. Jump conditions across the wake read

- for mass

$$[\rho u_n^{rel}] = 0 .$$

- for momentum, with negligible viscosity so that $\mathbf{t}_n = -P\hat{\mathbf{n}}$

$$[\rho \mathbf{u} u_n^{rel} + P\hat{\mathbf{n}}] = \mathbf{0} .$$

As the wake is (**todo Prove or justify**) a contact discontinuity, with no mass flux through it, $\dot{m} = \rho u_n^{rel} = 0$ (a stricter condition w.r.t. to no jump in mass flux across the surface), the momentum jump condition across the wake reads

$$[P\hat{\mathbf{n}}] = 0 ,$$

i.e. the vector condition contains a non-trivial 1-dimensional information, along the normal direction only $[P] = 0$.

Using second Bernoulli theorem, connecting a pair of points on the two sides of the wake (if needed, do an intermediate step connecting each one of these points with a point at infinity) gives

$$P^+ + \frac{1}{2}\rho |\mathbf{u}^+|^2 = P^- + \frac{1}{2}\rho |\mathbf{u}^-|^2 .$$

Using the relation between the velocity on each side of the wake, the average velocity, the velocity jump and the intensity of vortex sheet of the wake,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^+ &= \mathbf{u} + \frac{\Delta \mathbf{u}}{2} \\ \mathbf{u}^- &= \mathbf{u} - \frac{\Delta \mathbf{u}}{2} \\ \Delta \mathbf{u} &= -\hat{\mathbf{n}} \times \gamma , \end{aligned}$$

gives

$$\begin{aligned} 0 = [P] &= \\ &= P^+ - P^- = \\ &= \frac{1}{2}\rho \left[|\mathbf{u}|^2 + \frac{|\Delta \mathbf{u}|^2}{4} + \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u} - |\mathbf{u}|^2 - \frac{|\Delta \mathbf{u}|^2}{4} + \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u} \right] = \\ &= \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u} = \\ &= -\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \gamma = \\ &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} \times \gamma . \end{aligned}$$

As (**todo discuss**) \mathbf{u} and γ are everywhere orthogonal to $\hat{\mathbf{n}}$, and thus tangent to the wake surface, it follows that

$$\mathbf{u} \times \gamma = \mathbf{0} ,$$

or, equivalently,

$$\gamma \parallel \mathbf{u} \quad \text{or} \quad \begin{aligned} \gamma &= \gamma \hat{\mathbf{t}} \\ \mathbf{u} &= u \hat{\mathbf{t}} . \end{aligned}$$

Physical conditions: jump conditions, transport

...

Aerodynamic forces

Lift and drag

8.3.7 Weissinger method

The present implementation focuses on **steady flows**, first with prescribed wake and later with free wake. Vortex lattice or panel methods are an extension of Weissinger method, with surface discretization of geometries.

Project and (possible) future development

A reasonable path towards a simple potential aerodynamic 3-dimensional code for streamlined bodies are:

- geometry definition
- options, like ground effect
- wake-body interactions, for complex configurations
- ...

while problems to be tackled are:

- steady flows with prescribed wakes (linear problem)
- steady flows with free wakes (position of the wave filaments are unknowns of the problem, that becomes non-linear)
- unsteady flows: generic vs. linearized problems, generic vs. periodic, time vs. Fourier domain,...
- ...

Summary

Import libraries.

Functions: build geometry, to compute aerodynamic influence coefficients and build the linear system to be solved.

Simulation:

- define geometry, free-stream conditions, in or out ground-effect (

Post-processing:

- retrieve loads
- evaluate velocity and pressure (with Bernoulli's theorem) on $z = 0$ plane
- evaluate pressure shadow on ground projection of linear trajectories
- evaluate velocity field on a Trefftz-like plane in the wake

Libraries

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.collections import PolyCollection
from mpl_toolkits.mplot3d.art3d import Poly3DCollection
```

Functions

Some useful functions

Geometry: wing and prescribed wake

```
def build_wing_geometry( acs, chords, alphas, nspans, sym=False):
    """
    Inputs:
    -----
    x: stream-wise direction, y: chord-wise direction, z: normal direction (downwards)
    acs(3,n_vort+1): x,y,z coordinates of the reference point (here taken as the
                    "aerodynamic center" of each airfoils at .25 * chord from the
                    leading edge)
    chords, alphas: list of chords and aoas [rad]
    nspans(n_vort): # of spanwise vortices per span section
    sym: if True, define only a semi-wing and reflect it w.r.t. y-axis, y = 0

    Outputs:
    -----

    """

    x_ac = .0 # default (to be added as a function argument)

    #> If sym = False
    if sym == False:
        n_vortices = np.sum(nspans)
        n_points = n_vortices + 1
        n_nodes = 2 * n_points
        rr_le = np.zeros([3, n_points])
        rr_te = np.zeros([3, n_points])
        rr_le[0,0] = acs[0,0] - x_ac * chords[0] * np.cos(alphas[0])
        rr_le[1,0] = acs[1,0]
        rr_le[2,0] = acs[2,0] + x_ac * chords[0] * np.sin(alphas[0])
        rr_te[0,0] = acs[0,0] + (1.-x_ac) * chords[0] * np.cos(alphas[0])
        rr_te[1,0] = acs[1,0]
        rr_te[2,0] = acs[2,0] - (1.-x_ac) * chords[0] * np.sin(alphas[0])
        iy2 = 1
        #> rr
        for ispan in range(len(nspans)):
            iy1, iy2 = iy2, iy2 + nspans[ispan]
            ts = np.arange(1, nspans[ispan]+1) / nspans[ispan]
            dy = acs[1,ispan+1] - acs[1,ispan]
            ys = acs[1,ispan] + ts * dy
            xs = acs[0,ispan] + ts * ( acs[0,ispan+1] - acs[0,ispan] )
```

(continues on next page)

(continua dalla pagina precedente)

```

zs = acs[2,ispan] + ts * ( acs[2,ispan+1] - acs[2,ispan] )
cs = chords[ispan] + ts * (chords[ispan+1] - chords[ispan])
als = alphas[ispan] + ts * (alphas[ispan+1] - alphas[ispan])

rr_le[0,iy1:iy2] = xs - x_ac * cs * np.cos(als)
rr_le[1,iy1:iy2] = ys
rr_le[2,iy1:iy2] = zs + x_ac * cs * np.sin(als)

rr_te[0,iy1:iy2] = xs + (1-x_ac) * cs * np.cos(als)
rr_te[1,iy1:iy2] = ys
rr_te[2,iy1:iy2] = zs - (1-x_ac) * cs * np.sin(als)

rr = np.block([rr_le, rr_te])

#> ee
ee = np.zeros([4, n_vortices], dtype=int)
ee[0,:] = np.arange(n_points-1)
ee[1,:] = np.arange(1,n_points)
ee[2,:] = np.arange(n_points+1,2*n_points)
ee[3,:] = np.arange(n_points ,2*n_points-1)

else:
    n_points = ( 2*np.sum(nspans) + 1 ) * 2
    ee = np.zeros([4, n_points])

vsides = rr_te - rr_le
vcenter = .5 * ( vsides[:, :-1] + vsides[:, 1:] )

#> Center of the panel
cc = np.array([ np.mean(rr[:,ie], axis=1) for ie in list(ee.T)].T

# print('cc: ', cc); print('vcenter:', vcenter)
ac = cc - vcenter * .5
cp = cc # + vcenter * ( .5 - x_ac )

# print("ac: ", ac); print("cp: ", cp)

# print('ee: \n', ee)
# print('rr: \n', rr)
nor = np.array([ np.cross(rr[:, ie[2]]-rr[:, ie[0]], rr[:, ie[1]]-rr[:, ie[3]])
for ie in ee.T.tolist() ]).T
# print("nor: ")
# for n in np.arange(np.shape(nor)[1]):
#     print(nor[:,n])

nor = nor / np.linalg.norm(nor, axis=0, keepdims=True)

return ac, cp, ee, rr, nor

def build_prescribed_wake(ee, rr, dir=np.array([1., .0, .0]), length=10):
    """
    Assuming;
    - ee[0:2,:] are LE, and ee[2:4,:] TE nodes
    - rr[:,0:n_nodes/2] LE, rr[:,n_nodes/2:] TE
    """

```

(continues on next page)

```

n_nodes_wing = np.shape(rr)[1]
n_te = np.shape(ee)[1]
n_points = n_te + 1

i_te = np.arange(n_nodes_wing/2, n_nodes_wing, dtype=int)
rr_wake_te = rr[:, i_te]
rr_wake_end = rr_wake_te.copy()
for iwake in np.arange(np.shape(rr_wake_end)[1]):
    rr_wake_end[:,iwake] += length * dir
rr_wake = np.block([rr_wake_te, rr_wake_end])

# print('n_points: ', n_points)
ee_wake = np.zeros([4, n_te], dtype=int)
ee_wake[0,:] = np.arange(n_points-1)
ee_wake[1,:] = np.arange(1, n_points)
ee_wake[2,:] = np.arange(n_points+1, 2*n_points)
ee_wake[3,:] = np.arange(n_points, 2*n_points-1)

ite_wake = np.arange(n_te)

return ee_wake, rr_wake, ite_wake

def build_ground_effect_geometry(ac, cp, ee, rr, nor, ee_wake, rr_wake, ite_wake):
    """ """
    n_nodes = np.shape(rr)[1]
    n_te = np.shape(ee)[1]
    #>
    ac_g = ac.copy(); ac_g[2,:] = -ac_g[2,:]
    cp_g = cp.copy(); cp_g[2,:] = -cp_g[2,:]
    rr_g = rr.copy(); rr_g[2,:] = -rr_g[2,:]
    nor_g = nor.copy(); nor_g[2,:] = -nor_g[2,:]
    rr_wake_g = rr_wake.copy(); rr_wake_g[2,:] = -rr_wake_g[2,:]
    ee_g = ee[[1,0,3,2],:] + n_nodes
    ee_wake_g = ee_wake[[1,0,3,2],:] + n_nodes
    ite_wake_g = ite_wake + n_te

    ac = np.block([ac, ac_g])
    cp = np.block([cp, cp_g])
    rr = np.block([rr, rr_g])
    nor = np.block([nor, nor_g])
    rr_wake = np.block([rr_wake, rr_wake_g])
    ee = np.block([ee, ee_g])
    ee_wake = np.block([ee_wake, ee_wake_g])
    ite_wake = np.block([ite_wake, ite_wake_g])

    return ac, cp, ee, rr, nor, ee_wake, rr_wake, ite_wake

```

Aerodynamic Influence Coefficients (AIC) and Linear System

At each control point i ,

$$\mathbf{u}_b(\mathbf{r}_i) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i = \mathbf{u}(\mathbf{r}_i) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i ,$$

with \mathbf{u}_b the velocity of the solid surface, here $\mathbf{u}_b = \mathbf{0}$ (bodies at rest, w.r.t....), and the flow velocity $\mathbf{u}(\mathbf{r}_i)$ is the sum of the contributions from the free-stream velocity \mathbf{u}_∞ and the induced velocity from vortices with intensity Γ_j ,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_i) = \mathbf{u}_\infty + \sum_j \mathbf{u}_{j,1}(\mathbf{r}_i) \Gamma_j$$

with $\mathbf{u}_{j,1}$ the induced velocity in \mathbf{r}_i from a unit-intensity vortex j .

The linear system thus becomes

$$\sum_j \hat{\mathbf{n}}_i \cdot \mathbf{u}_{j,1}(\mathbf{r}_i) \Gamma_j = -\hat{\mathbf{n}}_i \cdot \mathbf{u}_\infty ,$$

or formally

$$\mathbf{A} \Gamma = \mathbf{b} .$$

```
def induced_velocity_line(r1, r2, rc):
    """ Induced velocity in cp from a unit-intensity line vortex with extreme points_
    ↪r1, r2 """

    # v = r2-r1; v_len = np.linalg.norm(v); v_unit = v / v_len
    # a1, a2 = rc-r1, rc-r2
    # t1 = np.dot(a1, v_unit) # tangential projection (scalar)
    # h = a1 - t1 * v_unit # normal projection (vector)
    # hdist = np.linalg.norm(h) # distance from cp to r1-r2 line

    # vel = ( (v_len-t1) / np.linalg.norm(a2) + t1 / np.linalg.norm(a1) ) / hdist**2_
    ↪* \
    #     np.cross(v_unit, h) / ( 4.0 * np.pi )

    # # print('v, v_len, v_unit: ', v, v_len, v_unit)
    # # print('a1, a2: ', a1, a2)
    # # print('t1: ', t1)
    # # print('h, hdist: ', h, hdist)
    # # print('vel: ', vel)

    # return vel

    r0 = r2 - r1
    r1c = rc - r1
    r2c = rc - r2

    cross = np.cross(r1c, r2c)
    norm_cross_sq = np.dot(cross, cross)
    if norm_cross_sq < 1e-10:
        return np.zeros(3) # avoid singularity

    term1 = np.dot(r0, r1c) / (np.linalg.norm(r1c) + 1e-12)
    term2 = np.dot(r0, r2c) / (np.linalg.norm(r2c) + 1e-12)
```

(continues on next page)

```

gamma = 1.
v = (gamma / (4 * np.pi)) * (cross / norm_cross_sq) * (term1 - term2)
return v

def build_weissinger_ls(ee, rr, cp, nor, ee_wake, rr_wake, ite_wake, vel):
    """ """
    nu = np.shape(ee)[1] # n. of unknowns

    #> Initialize array of AIC and the RHS
    A, b = np.zeros((nu, nu), dtype=float), np.zeros(nu, dtype=float)

    for i in np.arange(nu): # loop over control points (equations)
        for j in np.arange(nu): # loop over body vortices (unknowns)
            for l in np.arange(4): # loop over lines of the ring (4)
                r1 = rr[:, ee[ l % 4, j]]
                r2 = rr[:, ee[(l+1)% 4, j]]
                # print(cp[:,i])
                # print(nor[:,i])
                aic = np.dot(induced_velocity_line(r1, r2, cp[:,i]), nor[:,i])
                # print(i, j, l, aic)
                # print(induced_velocity_line(r1, r2, cp[:,i]))
                A[i, j] += aic

            for j in np.arange(nu): # loop over wake vortices (unknowns)
                for l in np.arange(4): # loop over lines of the ring (4)
                    jpan = ite_wake[j]
                    r1 = rr_wake[:, ee_wake[ l % 4, j]]
                    r2 = rr_wake[:, ee_wake[(l+1)% 4, j]]
                    A[i, jpan] += np.dot(induced_velocity_line(r1, r2, cp[:,i]), nor[:,i])

        b[i] = - np.dot(vel, nor[:,i])

    return A, b

```

Simulation

```

#> Parameters
vel_infty = np.array([1., 0., 0.])
rho = 1.

ground_effect = True
z_offset = 1.0 # height over z = 0. (ground)

alpha = 2. * np.pi / 180.
alpha_rad = alpha * np.pi / 180.
wake_dir = np.array([1., .0, -alpha_rad])
wake_len = 50

```

Build geometry

```

#> Build geometry

#> Parameters and input of build_wing_geometry() function
# #> Rectangular wing
# alpha = 1.
# nacs = 2
# acs = np.array([[ 0., -1., .0 ], [ 0., 100., 0.]])T
# acs[2,:] += z_offset
# chords = np.array([.3, .3,])
# alphas = np.array([alpha, alpha]) * np.pi/180.
# nspans = np.array([4])

#> Swept wing
nacs = 4
acs = np.array([[ .4,-1., .05], [ 0., -.3, .0 ], [ 0., .3, 0.], [ .4, 1., .05]])T
acs[2,:] += z_offset
chords = np.array([.1, .3, .3, .1])
alphas = np.array([0., 2., 2., 0.]) * np.pi/180. + alpha_rad
nspans = np.array([4, 2, 4])

# #> Swept wing (with symmetry option) - TODO
# nacs = 3
# acs = np.array([[ 0., .0, .0 ], [ 0., .3, 0.], [ .4, 1., .05]])T
# acs[2,:] += z_offset
# chords = np.array([.3, .3, .1])
# alphas = np.array([2., 2., 0.]) * np.pi/180.
# nspans = np.array([2, 3])

```

```

#> Build geometry
ac, cp, ee, rr, nor = build_wing_geometry(acs, chords, alphas, nspans, sym=False)

#> Wake
ee_wake, rr_wake, ite_wake = build_prescribed_wake(ee, rr, dir=wake_dir, length=wake_
↳len)

#> Ground effect
ground_effect = True # True
if ( ground_effect ):
    ac, cp, ee, rr, nor, ee_wake, rr_wake, ite_wake = \
        build_ground_effect_geometry(ac, cp, ee, rr, nor, ee_wake, rr_wake, ite_wake )

# print("ac:\n", ac)
# print("cp:\n", cp)

#> Plot Quad elements in a 3-dimensional plot
rr_plot, ee_plot, rr_wake_plot, ee_wake_plot = rr.copy(), ee.copy(), rr_wake.copy(),
↳ee_wake.copy()
verts = [ [ rr_plot.T.tolist()[int(i)] for i in p ] for p in ee_plot.T.tolist() ]
verts_wake = [ [ rr_wake_plot.T.tolist()[int(i)] for i in p ] for p in ee_wake_plot.T.
↳tolist() ]

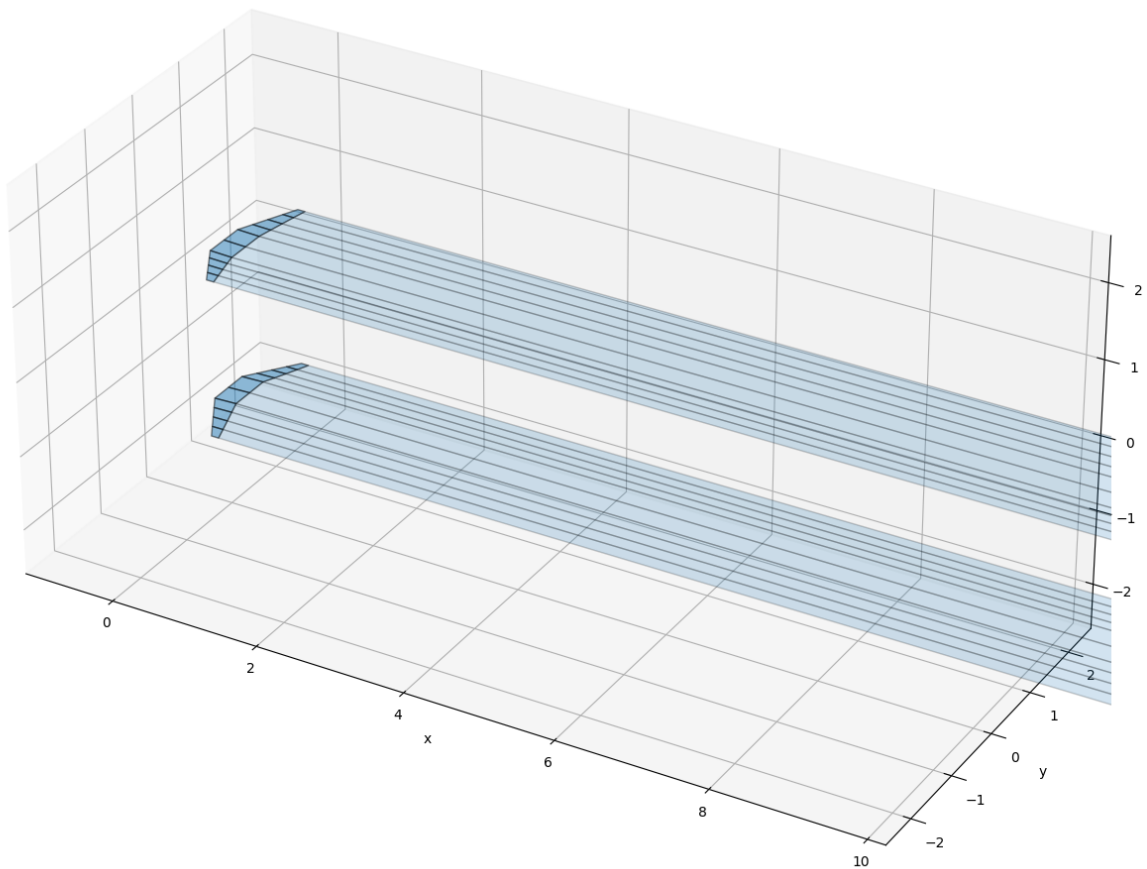
# print(verts_wake)

fig = plt.figure(figsize=(15, 15))

```

(continues on next page)

```
ax = plt.axes(projection='3d')
# ax.scatter3D(rr[0,:], rr[1,:], rr[2,:])
ax.add_collection3d(Poly3DCollection(verts, alpha=.5, edgecolor='black'), )
ax.add_collection3d(Poly3DCollection(verts_wake, alpha=.2, edgecolor='black'), )
# ax.scatter3D(ac[0,:], ac[1,:], ac[2,:], color='black')
# ax.scatter3D(cp[0,:], cp[1,:], cp[2,:], color='red')
# ax.scatter3D(rr_wake[0,:], rr_wake[1,:], rr_wake[2,:], color='blue')
# ax.quiver(cp[0,:],cp[1,:],cp[2:], nor[0:], nor[1:], nor[2:], length=.2, )
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('z')
ax.set_xlim([-1, 10])
ax.set_ylim([-2.5, 2.5])
ax.set_zlim([-2.5, 2.5])
ax.set_aspect('equal')
plt.show()
```



Linear system

```
#> Test induce velocity
# cp = np.array([0., 0., 0.])
# r1 = np.array([-1., 1., 0.])
# r2 = np.array([ 1., 1., 0.])

# vel = induced_velocity_line(r1, r2, cp)
# print(vel)

#> Build linear system
A, b = build_weissinger_ls(ee, rr, cp, nor, ee_wake, rr_wake, ite_wake, vel_infty)

#> Solve linear system
gam = np.linalg.solve(A, b)

print(gam)
```

```
[0.00439347 0.00915658 0.01447456 0.01957368 0.02368887 0.02368887
 0.01957368 0.01447456 0.00915658 0.00439347 0.00439347 0.00915658
 0.01447456 0.01957368 0.02368887 0.02368887 0.01957368 0.01447456
 0.00915658 0.00439347]
```

Post-processing and results

Loads

```
#> Retrieve loads
# print(ee_plot.T)
rho = 1.
# dspans and dchords for very rough computation of wing surface
dspans = np.array([ np.abs(rr[1, ie[0]] - rr[1, ie[1]]) for ie in ee_plot.T ])
dchords = np.array([ .5 * np.abs(-rr[0, ie[0]] - rr[0, ie[1]] + rr[0, ie[2]] + rr[0,
ie[3]]) for ie in ee_plot.T ])

dL = rho * np.linalg.norm(vel_infty) * gam * dspans

print(dL)

n_elems = np.sum(nspans) # retriev only real panels if ground effect is True
L = np.sum(dL[:n_elems])
yc = np.array([ .5*(rr[1,ie[0]] + rr[1,ie[1]]) for ie in ee_plot.T ])
print(yc)

S = np.sum(dspans[:n_elems]*dchords[:n_elems]) # chords[0] * ( acs[1,-1] - acs[1,0] )
alpha_rad = alpha * np.pi / 180.

print("spans: ", dspans)
print("chord: ", chords)
print("Surface: ", S)

print("Lift: ", L)
print("cl : ", L / ( .5 * rho * S * np.linalg.norm(vel_infty)**2 ))
```

(continues on next page)

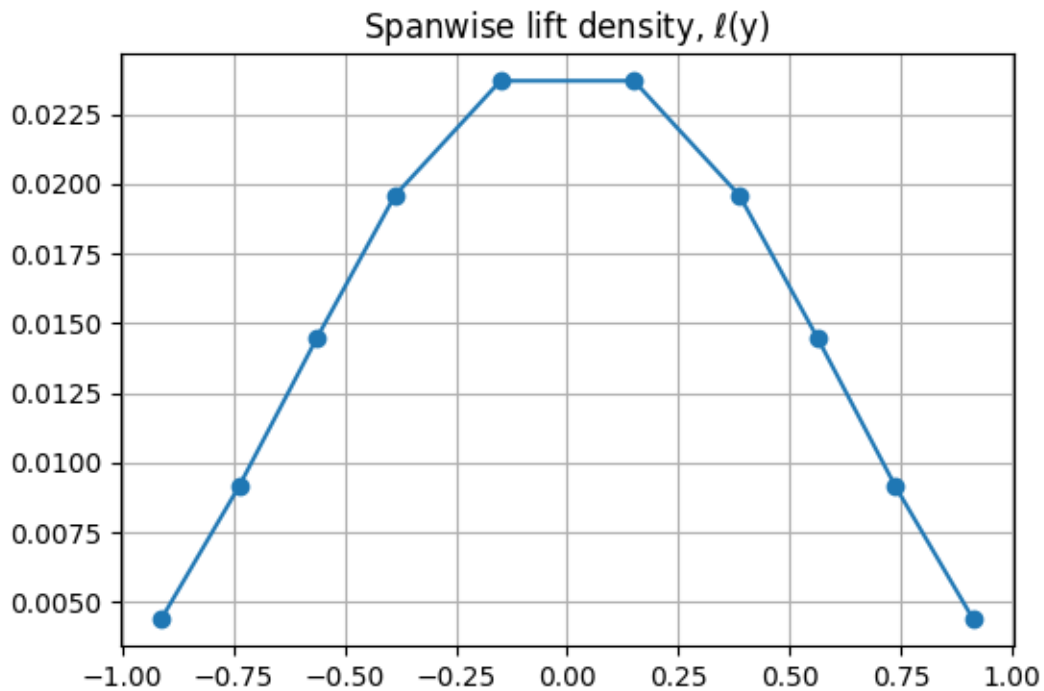
(continua dalla pagina precedente)

```
print("cl_alpha:", L / ( .5 * rho * S * np.linalg.norm(vel_infty)**2 ) / alpha_rad)

fig, ax = plt.subplots(1,1, figsize=(6,4))
ax.plot(yc[:n_elems], dL[:n_elems] / dspans[:n_elems], 'o-')
ax.grid()
ax.set_title('Spanwise lift density,  $\ell(y)$ ')
fig.show()
```

```
[0.00076886 0.0016024 0.00253305 0.00342539 0.00710666 0.00710666
0.00342539 0.00253305 0.0016024 0.00076886 0.00076886 0.0016024
0.00253305 0.00342539 0.00710666 0.00710666 0.00342539 0.00253305
0.0016024 0.00076886]
[-0.9125 -0.7375 -0.5625 -0.3875 -0.15 0.15 0.3875 0.5625 0.7375
0.9125 -0.9125 -0.7375 -0.5625 -0.3875 -0.15 0.15 0.3875 0.5625
0.7375 0.9125]
spans: [0.175 0.175 0.175 0.175 0.3 0.3 0.175 0.175 0.175 0.175 0.175 0.175
0.175 0.175 0.3 0.3 0.175 0.175 0.175 0.175]
chord: [0.1 0.3 0.3 0.1]
Surface: 0.45980827525107937
Lift: 0.030872724921761067
cl : 0.13428520791585555
cl_alpha: 220.41616662940893
```

```
/tmp/ipykernel_42587/4289016219.py:32: UserWarning: Matplotlib is currently using
module://matplotlib_inline.backend_inline, which is a non-GUI backend, so cannot
show the figure.
fig.show()
```



Velocity and pressure at ground

```

#> Evaluate velocity and pressure in desired points (probe points)
xarray = np.linspace(-10, 20, 30)
yarray = np.linspace(-5, 5, 20)
zarray = np.linspace( 0, 0, 1)

# print(xarray)
# print(yarray)
# print(zarray)

XX, YY = np.meshgrid(xarray, yarray)
UU, VV, WW = .0*XX, .0*XX, .0*XX

for ix in np.arange(np.shape(XX)[0]):
    for iy in np.arange(np.shape(XX)[1]):
        rr_probe = np.array([ XX[ix,iy], YY[ix,iy], .0 ])

        for j in np.arange(np.shape(ee)[1]):
            for l in np.arange(4):
                r1 = rr[:, ee[ l % 4,j]]
                r2 = rr[:, ee[(l+1)% 4,j]]
                vel = induced_velocity_line(r1, r2, rr_probe)

                UU[ix,iy] += vel[0]
                VV[ix,iy] += vel[1]
                WW[ix,iy] += vel[2]

            for j in np.arange(np.shape(ee_wake)[1]):
                for l in np.arange(4):
                    r1 = rr_wake[:, ee_wake[ l % 4,j]]
                    r2 = rr_wake[:, ee_wake[(l+1)% 4,j]]
                    vel = induced_velocity_line(r1, r2, rr_probe)

                    UU[ix,iy] += vel[0]
                    VV[ix,iy] += vel[1]
                    WW[ix,iy] += vel[2]

            UU[ix,iy] += vel_infty[0]
            VV[ix,iy] += vel_infty[1]
            WW[ix,iy] += vel_infty[2]

```

```

#> Pressure, using Bernoulli
PP = - rho * np.linalg.norm(vel_infty) * ( UU**2 + VV**2 + WW**2 ) / 2. + .5 * rho *
->np.linalg.norm(vel_infty)**2

```

```

print("max WW: ", np.max(WW))

fig, ax = plt.subplots(1,1, figsize=(12, 5))
ax.quiver(XX, YY, UU, VV,)
ax.set_aspect('equal') # Call set_aspect on the axes object
ax.set_title('Velocity at ground')
fig.show()

verts_2d = [ [ r[:2] for r in e ] for e in verts ]

```

(continues on next page)

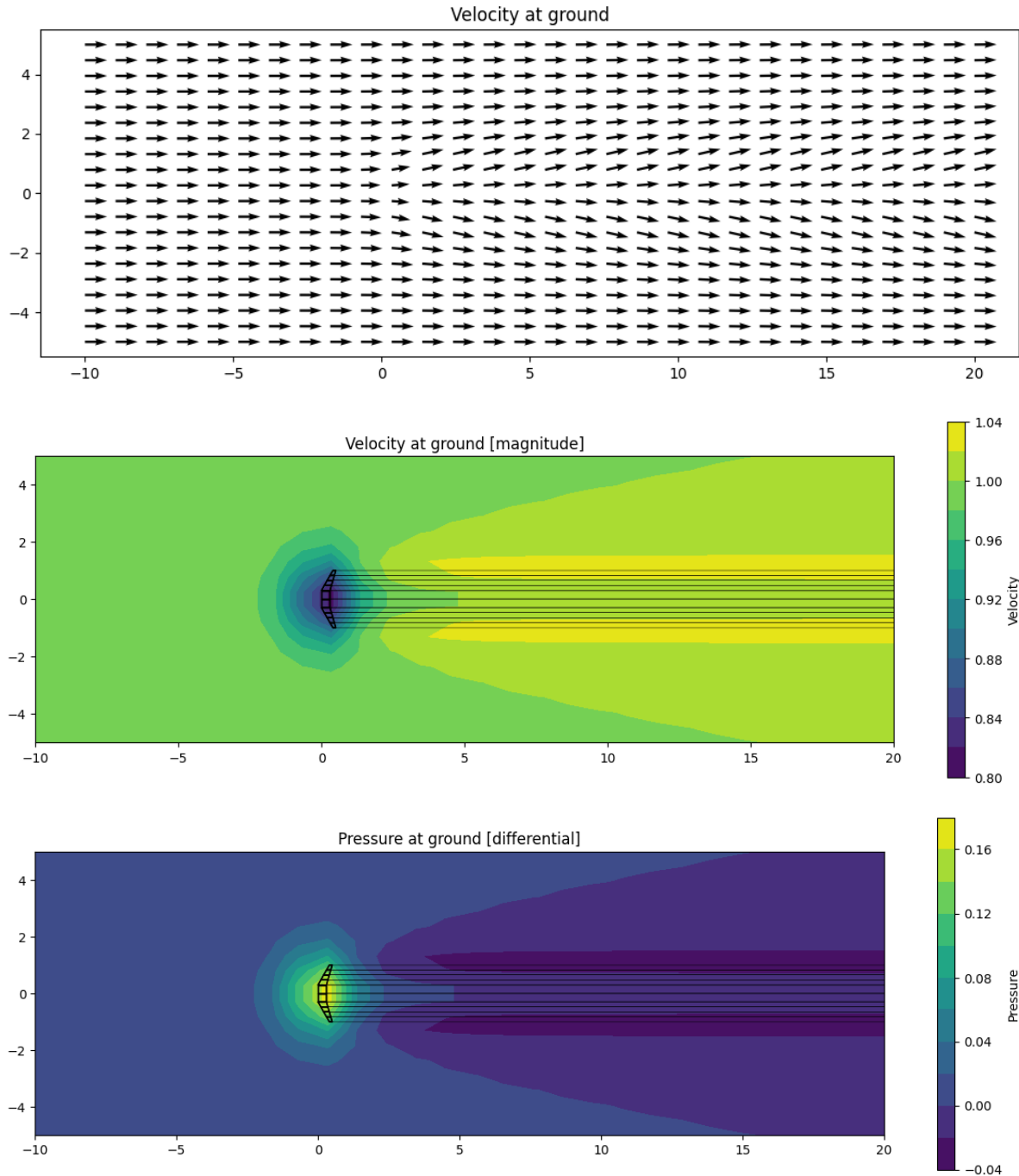
```
verts_wake_2d = [ [ r[:2] for r in e ] for e in verts_wake ]

fig, ax = plt.subplots(1,1, figsize=(15, 5))
cf = ax.contourf(XX, YY, np.sqrt(UU**2 + VV**2), 10)
ax.add_collection(PolyCollection(verts_2d, alpha=1., facecolor='none', edgecolor=
↳'black'), )
ax.add_collection(PolyCollection(verts_wake_2d, alpha=1., facecolor='none', edgecolor=
↳'black', linewidths=.2), )
ax.set_aspect('equal') # Call set_aspect on the axes object
cbar = fig.colorbar(cf, ax=ax)
cbar.set_label('Velocity')
ax.set_title('Velocity at ground [magnitude]')
fig.show()

fig, ax = plt.subplots(1,1, figsize=(15, 5))
cf = ax.contourf(XX, YY, PP, 10)
ax.add_collection(PolyCollection(verts_2d, alpha=1., facecolor='none', edgecolor=
↳'black'), )
ax.add_collection(PolyCollection(verts_wake_2d, alpha=1., facecolor='None', edgecolor=
↳'black', linewidths=.2), )
ax.set_aspect('equal') # Call set_aspect on the axes object
cbar = fig.colorbar(cf, ax=ax)
cbar.set_label('Pressure')
ax.set_title('Pressure at ground [differential]')
fig.show()
```

```
max WW: 9.71445146547012e-17
```

```
/tmp/ipykernel_42587/162280788.py:7: UserWarning: Matplotlib is currently using_
↳module://matplotlib_inline.backend_inline, which is a non-GUI backend, so cannot_
↳show the figure.
fig.show()
/tmp/ipykernel_42587/162280788.py:20: UserWarning: Matplotlib is currently using_
↳module://matplotlib_inline.backend_inline, which is a non-GUI backend, so cannot_
↳show the figure.
fig.show()
/tmp/ipykernel_42587/162280788.py:30: UserWarning: Matplotlib is currently using_
↳module://matplotlib_inline.backend_inline, which is a non-GUI backend, so cannot_
↳show the figure.
fig.show()
```



Local pressure at ground along a line

```

from scipy.interpolate import RegularGridInterpolator

line_extremes = [
    { 'x0': -10., 'y0': 0., 'x1': 20., 'y1': 0. },
    { 'x0': -5., 'y0': -5., 'x1': -5., 'y1': 5. },
    { 'x0': 10., 'y0': -5., 'x1': 10., 'y1': 5. },
    { 'x0': -10., 'y0': -2., 'x1': 20., 'y1': 4. },
    { 'x0': -10., 'y0': -4., 'x1': 10., 'y1': 5. },
]

n_points = 100

for iline in line_extremes:
    # . Generate sampling points along the line
    xs = np.linspace(iline['x0'], iline['x1'], n_points)
    ys = np.linspace(iline['y0'], iline['y1'], n_points)
    ds = np.sqrt( ( xs[1:] - xs[0:-1] )**2 + ( ys[1:] - ys[0:-1] )**2 )
    ss = np.cumsum(ds); ss = np.insert(ss, 0, 0)
    points = np.vstack([ys, xs]).T # IMPORTANT: order = (y, x)

    interp = RegularGridInterpolator( (yarray, xarray), PP, method='linear', bounds_
error=False, fill_value=None )
    p_line = interp(points)

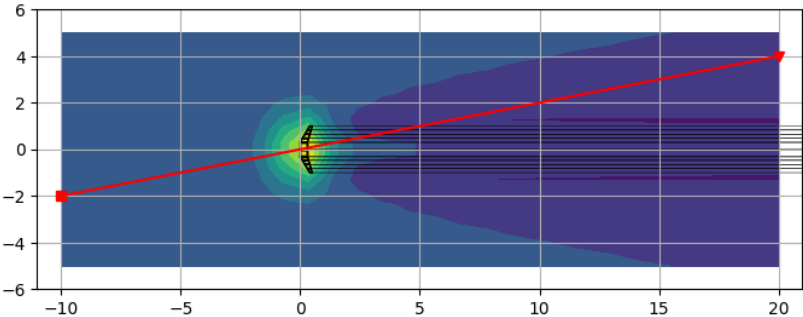
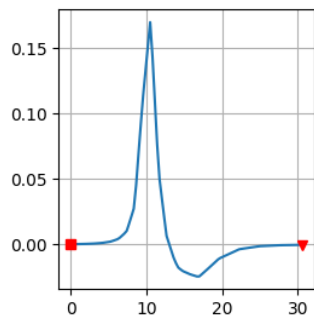
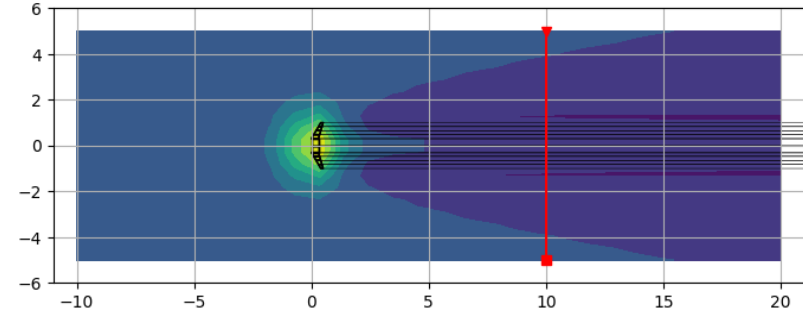
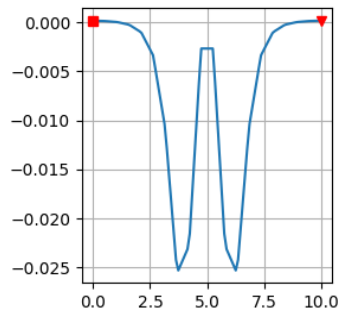
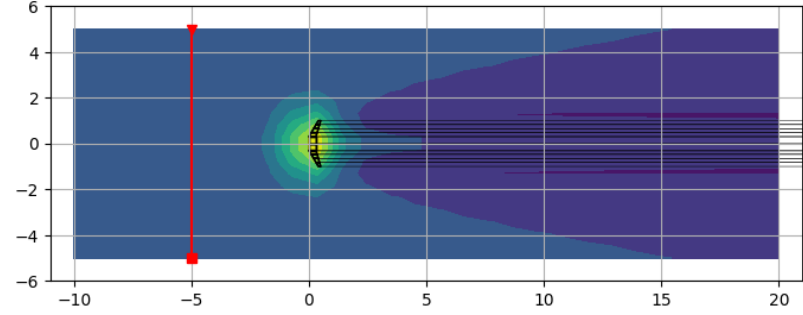
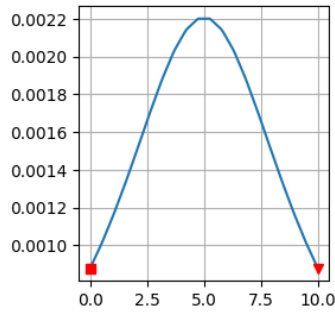
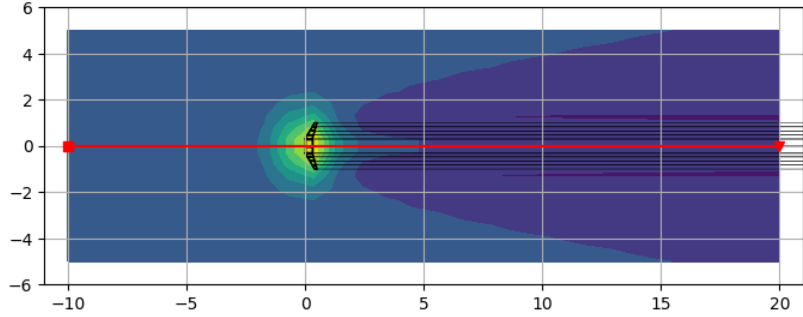
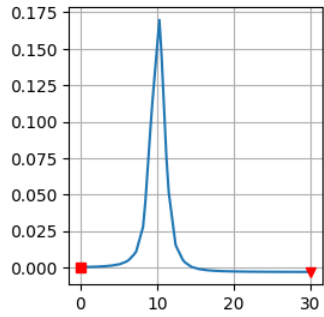
    fig, ax = plt.subplots(1,2, figsize=(12, 3), gridspec_kw={'width_ratios': [1, 3]})
    ax[0].plot(ss, p_line)
    ax[0].plot(ss[0], p_line[0], 's', color='red'); ax[0].plot(ss[-1], p_line[-1], 'v'
, color='red');
    ax[1].contourf(XX, YY, PP)
    ax[1].plot(xs, ys, color='red')
    ax[1].plot(xs[0], ys[0], 's', color='red'); ax[1].plot(xs[-1], ys[-1], 'v',
color='red');
    ax[1].add_collection(PolyCollection(verts_2d, alpha=1., facecolor='none',
edgecolor='black'), )
    ax[1].add_collection(PolyCollection(verts_wake_2d, alpha=1., facecolor='None',
edgecolor='black', linewidths=.2), )
    ax[1].set_xlim(np.min(XX)-1, np.max(XX)+1)
    ax[1].set_ylim(np.min(YY)-1, np.max(YY)+1)
    ax[0].grid(); ax[1].grid()
    fig.show()

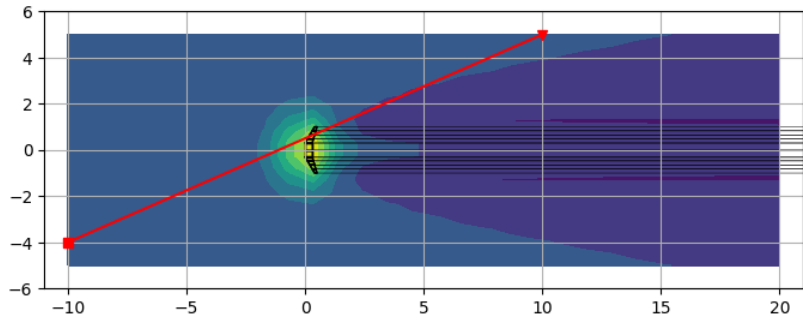
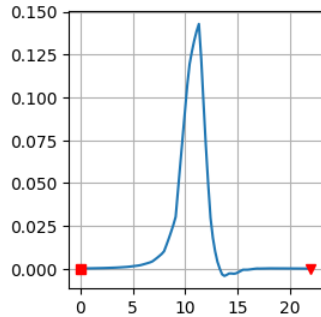
```

```

/tmp/ipykernel_42587/1289699379.py:35: UserWarning: Matplotlib is currently using
module://matplotlib_inline.backend_inline, which is a non-GUI backend, so cannot
show the figure.
fig.show()

```





Trefftz-like plane

```
#> Wake ~ "Trefftz"-like plane
xw = 10
xarray = np.linspace(xw,xw, 1)
yarray = np.linspace(-2, 2, 15)
zarray = np.linspace( 0, 2, 8)

YY, ZZ = np.meshgrid(yarray, zarray)

UU, VV, WW = .0*YY, .0*YY, .0*YY

for iy in np.arange(np.shape(YY)[0]):
    for iz in np.arange(np.shape(YY)[1]):
        rr_probe = np.array([ xw, YY[iy,iz], ZZ[iy,iz] ])

        for j in np.arange(np.shape(ee)[1]):
            for l in np.arange(4):
                r1 = rr[:, ee[ l % 4,j]]
                r2 = rr[:, ee[(l+1)% 4,j]]
                vel = induced_velocity_line(r1, r2, rr_probe)

                UU[iy,iz] += vel[0]
                VV[iy,iz] += vel[1]
                WW[iy,iz] += vel[2]

        for j in np.arange(np.shape(ee_wake)[1]):
            for l in np.arange(4):
                r1 = rr_wake[:, ee_wake[ l % 4,j]]
                r2 = rr_wake[:, ee_wake[(l+1)% 4,j]]
                vel = induced_velocity_line(r1, r2, rr_probe)

                UU[iy,iz] += vel[0]
                VV[iy,iz] += vel[1]
                WW[iy,iz] += vel[2]

        UU[iy,iz] += vel_infty[0]
        VV[iy,iz] += vel_infty[1]
        WW[iy,iz] += vel_infty[2]
```

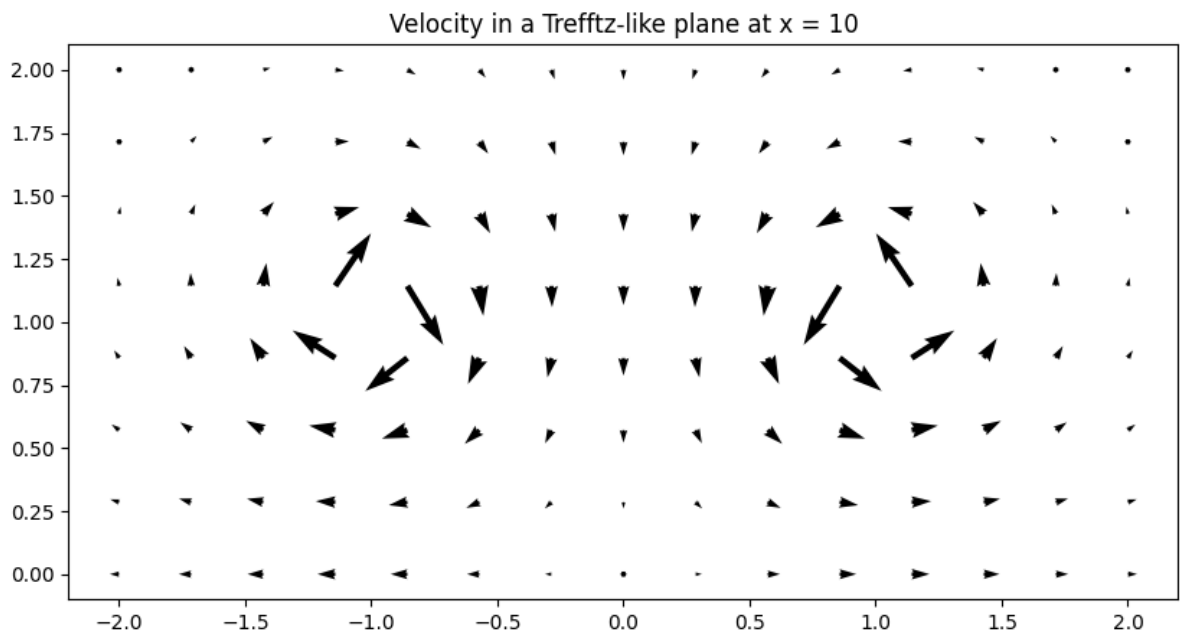
```
fig, ax = plt.subplots(1,1, figsize=(12, 5))
ax.quiver(YY, ZZ, VV, WW, scale=15)
ax.set_aspect('equal') # Call set_aspect on the axes object
```

(continues on next page)

(continua dalla pagina precedente)

```
ax.set_title(f"Velocity in a Trefftz-like plane at x = {xw}")
fig.show()
```

```
/tmp/ipykernel_42587/2078332749.py:5: UserWarning: Matplotlib is currently using
↳module://matplotlib_inline.backend_inline, which is a non-GUI backend, so cannot
↳show the figure.
fig.show()
```



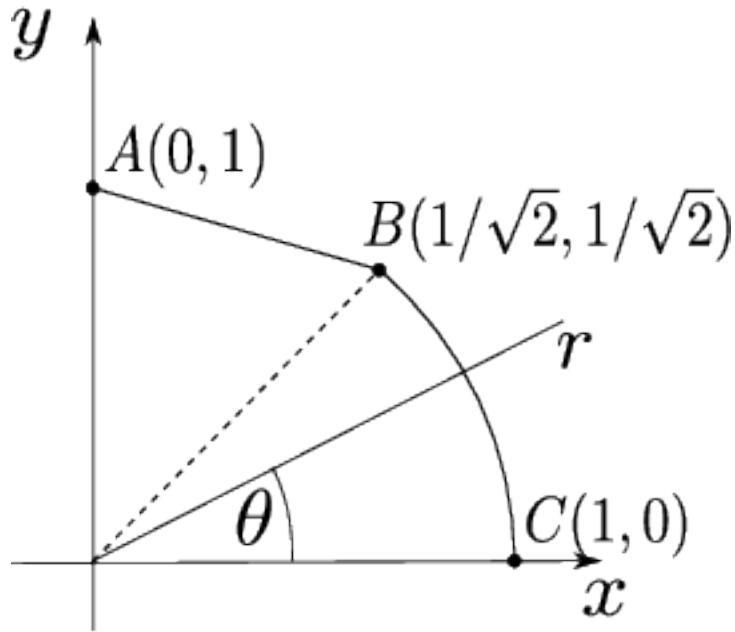
8.4 Exercises

Exercise 8.1 Un flusso incomprimibile, irrotazionale, bidimensionale e stazionario è descritto in coordinate polari dal potenziale cinetico

$$\phi(r, \theta) = r^2 \cos(2\theta)$$

Si chiede di:

- determinare il campo di velocità, eventuali punti di ristagno, eventuali linee di corrente rettilinee;
- disegnare le linee di corrente;
- determinare il flusso attraverso il segmento che va dal punto $A = (x_A, y_A) = (0, 1)$ al punto $B = (x_B, y_B) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e il flusso attraverso l'arco di circonferenza centrata nell'origine, da B a $C = (x_C, y_C) = (1, 0)$. Discutere il risultato;
- dimostrare che le linee di corrente e le curve di livello del potenziale sono tra di loro perpendicolari.



Exercise 8.2

Exercise 8.3

Exercise 8.4

Exercise 8.5

Exercise 8.6

Exercise 8.7

Exercise 8.8

Exercise 8.9

Legame tra potenziale e velocità. Funzione di corrente per problemi 2D incomprimibili. $u \cdot \hat{n} =$

$$\int_A^B u \cdot \hat{n} = \int_A^B u n_x + v n_y = \int_A^B \frac{\partial \psi}{\partial x} t_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} t_y = \int_A^B \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right] ds = \int_A^B \frac{d\psi}{ds}(x(s), y(s)) ds = \psi(B) - \psi(A)$$

$$\nabla \phi \begin{cases} u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad \text{Flusso di volume come differenza di funzione di corrente}$$

- Campo di velocità, punto di ristagno e linee di corrente rettilinee

$$- \phi, u, \psi: \phi = r^2 \cos(2\theta) = r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = x^2 - y^2 \begin{cases} u = \partial \phi / \partial x = 2x \\ v = \partial \phi / \partial y = -2y \end{cases} \rightarrow \psi(x, y) = 2xy + C$$

- punto di ristagno: $(x, y) = (0, 0)$.

- Linee di corrente rettilinee: $(x, y) = (0, y)$ entranti nell'origine, $(x, y) = (x, 0)$ uscenti dall'origine.

- ...

- flusso attraverso AB e BC . La normale considerata «punta a destra» mentre viene percorsa la curva: valgono quindi $n_x = t_y$ e $n_y = -t_x$.

$$\begin{cases} \Phi_{AB} = \psi(B) - \psi(A) = 1 - 0 = 1 \\ \Phi_{BC} = \psi(C) - \psi(B) = 0 - 1 = -1 \end{cases} \quad \text{Si consideri la curva chiusa costituita da } AB, BC \text{ e dagli assi. Non c'è flusso attraverso il campo è regolare in tutto il dominio.}$$

- Il gradiente di una funzione è perpendicolare alle curve di livello: si può quindi verificare che i gradienti siano perpendicolari. Considerando le relazioni:
$$\begin{cases} u = \partial\phi/\partial x = \partial\psi/\partial y \\ v = \partial\phi/\partial y = -\partial\psi/\partial x \end{cases} \quad \text{Si scrivere } \nabla\phi \cdot \nabla\psi = uv - vu = 0$$

9.1 Equazioni di Prandtl dello strato limite

Steady Navier—Stokes equations for a 2-dimensional flow using Cartesian coordinates read

$$\begin{cases} u\partial_x u + v\partial_y u - \nu(\partial_{xx}u + \partial_{yy}u) + \frac{1}{\rho}\partial_x P = 0 \\ u\partial_x v + v\partial_y v - \nu(\partial_{xx}v + \partial_{yy}v) + \frac{1}{\rho}\partial_y P = 0 \\ \partial_x u + \partial_y v = 0 \end{cases}$$

Let's assume the flow of interest has a main stream-wise direction, here identified by x coordinate, while y runs in the orthogonal direction. Let U , V , X , δ be characteristic x - and y - components of the velocity field and lengths. Non-dimensional equations become

$$\begin{cases} \frac{U^2}{X}u\partial_x u + \frac{UV}{\delta}v\partial_y u - \frac{\nu U}{X^2}\partial_{xx}u - \frac{\nu U}{\delta^2}\partial_{yy}u + \frac{P}{\rho X}\partial_x P = 0 \\ \frac{UV}{X}u\partial_x v + \frac{V^2}{\delta}v\partial_y v - \frac{\nu V}{X^2}\partial_{xx}v - \frac{\nu V}{\delta^2}\partial_{yy}v + \frac{P}{\rho\delta}\partial_y P = 0 \\ \frac{U}{X}\partial_x u + \frac{V}{\delta}\partial_y v = 0 \end{cases}$$

Let the 2 terms in the incompressibility constraint have the same order of magnitude. It follows that $V \sim \frac{\delta}{X}U$. Using this relation, and assuming $P \sim \rho U^2$, the non-dimensional equations become

$$\begin{cases} \frac{U^2}{X} \left[(u\partial_x u + v\partial_y u - \partial_{yy}u + \partial_x P) - \left(\frac{\delta}{X}\right)^2 (\partial_{xx}u) \right] = 0 \\ \frac{U^2}{X} \left[\frac{X}{\delta} (\partial_y P) + \frac{\delta}{X} (u\partial_x v + v\partial_y v - \partial_{yy}v) - \left(\frac{\delta}{X}\right)^3 \partial_{xx}v \right] = 0 \\ \frac{U}{X} (\partial_x u + \partial_y v) = 0, \end{cases}$$

If $X \gg \delta$ (or equivalently $U \gg V$),

- in the x -component of the momentum equation $\partial_{yy}u$ prevails over $\partial_{xx}u$; the convective term and the x -component of the pressure gradient has the same order of magnitude, given $P \sim \rho U^2$; the leading contribution of the viscous term has the same order of magnitude if $\frac{\nu X}{U\delta^2} \sim 1$, and thus

$$\delta(x) \sim \left(\frac{\nu x}{U}\right)^{\frac{1}{2}} = x \left(\frac{\nu}{xU}\right)^{\frac{1}{2}} = x \text{Re}_x^{-\frac{1}{2}},$$

i.e.

$$\delta(x) \sim x^{\frac{1}{2}} .$$

In order to have thin boundary layers, $\delta(x) \ll x$, i.e. viscoisty should be «small enough» to be dominated by convection, except for the $\nu \partial_{yy} u$ contribution in the thin boundary layer region. Once divided by $\frac{U^2}{X}$ the leading order of the x -component of the momentum equation is ~ 1 .

- in the y -component of the momentum equation, the leading term is the y -component of the pressure gradient, $\partial_y P$, with order ε^{-1} , being $\varepsilon := \frac{\delta}{X}$

Retaining the leading components of the equations, Navier-Stokes equation reduces to Prandtl equations, whose non-dimensional form reads

$$\begin{cases} u\partial_x u + v\partial_y u - \partial_{yy} u + \partial_x P = 0 \\ \partial_y P = 0 \\ \partial_x u + \partial_y v = 0 , \end{cases}$$

todo

- *Discuss the mathematical nature of Prandtl equations (parabolic equation?): which boundary conditions? Examples for different flows: b.l. on flat surface, jet flows, shear layers, wakes behing a body,...*
- Pressure across boundary layers is approximately constant, as $\partial_y P = 0$

9.2 Integral thicknesses

9.3 Von Karman integral equation

9.3.1 Integration of Von Karman integral equation

9.3.2 Thwaites method

9.4 Self-similar laminar boundary layer flows

9.4.1 Boundary layer on flat plate: Blasius solution

Boundary conditions read

$$\begin{aligned} u(x=0, y) &= U \\ u(x, y=0) &= 0 \\ v(x, y=0) &= 0 \\ u(x, y=+\infty) &= U \end{aligned}$$

Assuming irrotational flow outside the b.l., pressure is uniform in the whole domain: as the velocity is uniform in the irrotational region, pressure is uniform there, as a consequence of Bernoulli's theorems. As pressure is constant across the boundary layer in the orthogonal direction, pressure is uniform both inside and outside the boundary layer, $P(x, y) = \bar{P}$.

Without any reference length scale, a self-similar solution may exist: for a self-similar flow, fields are function of a self-similarity coordindate $\eta(x, y) = \frac{y}{\delta(x)}$ and not of x, y independently.

Using stream-function ψ , $u = \psi_{/y}$, $v = -\psi_{/x}$, incompressibility constraint is identically satisfied. The last equation to deal with is the x -component of the momentum equation, that becomes

$$\psi_{/y}\psi_{/yx} - \psi_{/x}\psi_{/yy} - \nu\psi_{/yyy} = 0.$$

Let $\psi(x, y) = U\delta(x)g(\eta(x, y))$, the components of the velocity field becomes

$$\begin{aligned}\frac{u}{U} &= \psi_{/y} = \delta(x)g'(\eta)\eta_{/y} = \\ &= \delta(x)g'(\eta)\frac{1}{\delta(x)} = \\ &= g'(\eta) \\ \frac{v}{U} &= -\psi_{/x} = \delta'(x)g(\eta) + \delta(x)g'(\eta)\eta_{/x} = \\ &= \delta'(x)g(\eta) - \delta(x)g'(\eta)\frac{y\delta'(x)}{\delta^2(x)} = \\ &= \delta'(x)g(\eta) - \eta g'(\eta)\delta'(x)\end{aligned}$$

while all the other derivatives appearing in the x -component of the momentum equation read

$$\begin{aligned}\psi_{/yy} &= g''(\eta)\frac{1}{\delta(x)} \\ \psi_{/yyy} &= g'''(\eta)\frac{1}{\delta^2(x)} \\ \psi_{/yx} &= -g''(\eta)\frac{y\delta'(x)}{\delta^2(x)} = -\eta g''(\eta)\frac{\delta'(x)}{\delta(x)}\end{aligned}$$

Inserting these expression in the x -component of the momentum equation,

$$\begin{aligned}0 &= -U^2 g' g'' \eta \frac{\delta'}{\delta} - (\delta' g - \eta g' \delta') g'' \frac{1}{\delta} - \nu U g''' \frac{1}{\delta^2} = \\ &= -U^2 g g'' \frac{\delta'}{\delta} - \nu U g''' \frac{1}{\delta^2},\end{aligned}$$

or

$$0 = \frac{U\delta'(x)\delta(x)}{\nu} g(\eta)g''(\eta) + g'''(\eta).$$

In order to get a self-similar solution, no term depending only on x or y may appear in the equation. Thus, the coefficient of the first term must be constant,

$$C = \frac{U\delta'(x)\delta(x)}{\nu} = \frac{U}{\nu} \frac{d}{dx} \frac{\delta^2(x)}{2},$$

and usually C is chosen to be $C = \frac{1}{2}$ (this choice just changes the definition of the arbitrary thickness of the b.l. $\delta(x)$ by a multiplicative factor. Solving this equation, the arbitrary thickness of the b.l. goes as

$$\delta(x) - \delta(x_0) = \sqrt{\frac{\nu}{U}(x - x_0)},$$

while the x -component of the momentum equation becomes

$$\frac{1}{2} g g'' + g''' = 0,$$

supplied with the boundary conditions

$$\begin{aligned}g(0) &= 0 \\ g'(0) &= 0 \\ g'(+\infty) &= 1,\end{aligned}$$

for the b.l. on a flat plate.

Proof of the boundary conditions for the b.l on the flat plate

Proof that the 4 boundary conditions written as a function of the velocity field or the stream-function are equivalent to the 3 boundary conditions written in terms of the similarity function $g(\eta)$

todo

9.5 Exercises

Exercise 9.1.

10.1 RANS and energy equations

10.1.1 RANS

Incompressible Navier—Stokes equations.

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla P = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases}$$

with $P = \frac{P}{\rho}$ with little abuse of notation, and no volume force. For incompressible flows, the following relation holds

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

Proof

Using Cartesian coordinates

$$i = (u_j u_i)_{/j} = \underbrace{u_{j/j}}_{=0} u_i + u_j u_{i/j} = \{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}\}_i,$$

as $u_{j/j} = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, for the incompressibility constraint.

Incompressible Reynolds-averaged Navier—Stokes equations, RANS. Applying average operator¹ to NS equations

$$\overline{\mathbf{NS}},$$

after having defined the relation between the realization of a field, its average and fluctuation,

$$f = \bar{f} + f',$$

¹ What's a proper definition? Can equations be time-dependent? It looks so, if fields are interpreted as stochastic fields and average is an average in probability and not time.

so that applying average $\overline{f'} = 0$, RANS equations follows²

$$\begin{cases} \partial_t \bar{\mathbf{u}} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} - \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{P} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \end{cases}$$

if average and differential operators swaps for linear terms. An extra-contribution arises from the non-linear term, as

$$\begin{aligned} \overline{ab} &= \overline{(\bar{a} + a')(\bar{b} + b')} = \\ &= \overline{\bar{a}\bar{b}} + \underbrace{\overline{\bar{a}b'}}_{\bar{a}\bar{b}'=0} + \underbrace{\overline{a'\bar{b}}}_{a'\bar{b}=0} + \overline{a'b'} = \\ &= \bar{a}\bar{b} + \overline{a'b'}. \end{aligned}$$

This can be interpreted as *extra* stress contribution (as it has the expression of the divergence of a 2-nd order symmetric tensor) felt by the average fields $\bar{\mathbf{u}}, \bar{P}$, due to fluctuations \mathbf{u}' .

Equation of the fluctuation. Taking the difference between NS equations and RANS equations, the equation for the fluctuation $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$ seamlessly follows

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}' + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) - \nabla \cdot \overline{(\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}')} - \nu \Delta \mathbf{u}' + \nabla P' = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}' + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{u}') + \nabla \cdot (\mathbf{u}' \otimes \bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}') - \nabla \cdot \overline{(\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}')} - \nu \Delta \mathbf{u}' + \nabla P' = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \end{cases}$$

10.1.2 Energy equations

Here, kinetic energy equation, average kinetic energy, kinetic energy of the average field, kinetic energy of the fluctuation and its average,... Kinetic energy per unit-mass is

$$K := \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2},$$

and it can be recast using the average and the fluctuation fields

$$\begin{aligned} K &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} = \\ &= \frac{(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')}{2} = \\ &= \frac{\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}}}{2} + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'}{2} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}' \end{aligned}$$

being the first term the kinetic energy of the average flow, the second term the kinetic energy of the fluctuations, and the last term the cross-effects. Taking average, to get the average kinetic energy \bar{K} the last term disappears, and a relation between the average kinetic energy, the energy of the average flow and the turbulent energy (defined as the average of the kinetic energy of the fluctuations) arises

$$\bar{K} = K_{\bar{\mathbf{u}}} + k.$$

Kinetic energy, K . Taking the dot-product of the NS equations with the velocity field, $\mathbf{u} \cdot \text{NS}$, and exploiting product rule for derivatives,

$$\partial_t \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} - \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{u} \cdot \nabla P = 0$$

As shown in the box below, the last two contributions can be rearranged to get

$$\frac{DK}{Dt} = \nabla \cdot (\nu \nabla K - P\mathbf{u}) - \nu |\nabla \mathbf{u}|^2.$$

² Is it possible to swap average operator and differential operators? Let's assume it is.

Rearranging terms

Assuming uniform viscosity ν

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbb{S} &= \nu \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) = \\ &= \nu \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u} = \\ &= \nu \nabla \cdot ((\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}) - \nu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} = \\ &= \nabla \cdot \left(\nu \nabla \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \right) - \nu |\nabla \mathbf{u}|^2, \end{aligned}$$

as $\nabla \cdot \nabla^T \mathbf{u} = \partial_i \partial_j u_i = \partial_j u_{i/i} = 0$.

Pressure term can be recast as a divergence contribution as

$$\mathbf{u} \cdot \nabla P = \nabla \cdot (P \mathbf{u}) - \underbrace{P \nabla \cdot \mathbf{u}}_{=0} = \nabla \cdot (P \mathbf{u}).$$

Average kinetic energy, \overline{K} . Taking the average of the kinetic energy equation,

Rearranging terms

$$\begin{aligned} \partial_t \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} - \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbb{S} + \mathbf{u} \cdot \nabla P &= 0 \\ \overline{\partial_t \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2}} &= \partial_t \overline{K} \\ \overline{\mathbf{u} \cdot \nabla K} &= \bar{u} \end{aligned}$$

...

todo

Kinetic energy of the average field, $K_{\bar{\mathbf{u}}}$. Taking the scalar product $\bar{\mathbf{u}} \cdot$ RANS

$$\frac{\overline{D}K_{\bar{\mathbf{u}}}}{\overline{D}t} = \nabla \cdot (\nu \nabla K_{\bar{\mathbf{u}}} - \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} \cdot \bar{\mathbf{u}} - \bar{P} \bar{\mathbf{u}}) + \nabla \bar{\mathbf{u}} : \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} - \nu \nabla \bar{\mathbf{u}} : \nabla \bar{\mathbf{u}}$$

Source contributions:

- turbulent energy «production» (as it will be more clear later), $\nabla \bar{\mathbf{u}} : \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$. This contribution has no defined sign. It appears with the opposite side in the equation of the turbulent energy: it could be interpreted as a term that (mainly?) removes energy from the average flow to produce turbulent kinetic energy
- viscous dissipation from the average flow (always non positive), $-\nu \nabla \bar{\mathbf{u}} : \nabla \bar{\mathbf{u}} \leq 0$. Is this relevant for large Reynolds number?

Flux contributions: ...

$$\frac{\overline{D}K_{\bar{\mathbf{u}}}}{\overline{D}t} = \nabla \cdot \Phi_{K_{\bar{\mathbf{u}}}} - \mathcal{P} - \mathcal{D}_{\bar{\mathbf{u}}}$$

Rearranging terms

$$\begin{cases} \partial_t \bar{\mathbf{u}} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} - \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{P} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \end{cases}$$

$$\partial_t K_{\bar{\mathbf{u}}}$$

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla K_{\bar{\mathbf{u}}}$$

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \cdot \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} = U_j \overline{(u'_i u'_j)_{/i}} = \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} \cdot \bar{\mathbf{u}}) - \nabla \bar{\mathbf{u}} : \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$$

...

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\overline{DK_{\bar{\mathbf{u}}}}}{\overline{Dt}} + \\ & + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} \cdot \bar{\mathbf{u}}) - \nabla \bar{\mathbf{u}} : \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} + \\ & - \nabla \cdot (\nu \nabla K_{\bar{\mathbf{u}}}) + \nu \nabla \bar{\mathbf{u}} : \nabla \bar{\mathbf{u}} + \\ & + \nabla \cdot (\bar{P} \bar{\mathbf{u}}) \end{aligned}$$

or collecting divergence (or flux, in an integral formulation) terms and volume source terms

$$\frac{\overline{DK_{\bar{\mathbf{u}}}}}{\overline{Dt}} = \nabla \cdot (\nu \nabla K_{\bar{\mathbf{u}}} - \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} \cdot \bar{\mathbf{u}} - \bar{P} \bar{\mathbf{u}}) + \nabla \bar{\mathbf{u}} : \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} - \nu \nabla \bar{\mathbf{u}} : \nabla \bar{\mathbf{u}}$$

Kinetic energy of the fluctuation, k' . Taking the scalar product $\mathbf{u}' \cdot$ Fluctuation equations

$$\frac{Dk'}{Dt} = -\nabla \bar{\mathbf{u}} : \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' - \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} : \nabla \mathbf{u}' - \nu \nabla \mathbf{u}' : \nabla \mathbf{u}' + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} \cdot \mathbf{u}' + \nu \nabla k' - P' \mathbf{u}')$$

Rearranging terms

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}' + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{u}') + \nabla \cdot (\mathbf{u}' \otimes \bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}') - \nabla \cdot \overline{(\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}')} - \nu \Delta \mathbf{u}' + \nabla P' = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{u}' \cdot \partial_t \mathbf{u}' = \partial_t \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'}{2}$$

$$\mathbf{u}' \cdot \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{u}') = u'_i (U_j u'_i)_{/j} = U_j \{ (u'_i u'_i) / 2 \}_{/j}$$

$$\mathbf{u}' \cdot \nabla \cdot (\mathbf{u}' \otimes \bar{\mathbf{u}}) = u'_i (u'_j U_i)_{/j} = u'_i u'_j U_i / j$$

$$\mathbf{u}' \cdot \nabla \cdot (\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}') = u'_i (u'_j u'_i)_{/j} = u'_j \left\{ \frac{u'_i u'_i}{2} \right\}_{/j} = \left\{ \frac{u'_i u'_i}{2} \right\}_{/jj}$$

$$\mathbf{u}' \cdot \nabla \cdot \overline{(\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}')} = u'_i \overline{(u'_j u'_i)_{/j}} = \overline{(u'_i u'_j u'_i)_{/j}} - u'_{i/j} \overline{u'_j u'_i}$$

$$u'_i u'_{i/jj} = \overline{(u'_i u'_i)_{/jj}} - u'_{i/j} \overline{u'_j u'_i} = \left(\frac{u'_i u'_i}{2} \right)_{/jj} - u'_{i/j} \overline{u'_j u'_i}$$

and putting everything together

$$\partial_t k' + \mathbf{u}' \cdot \nabla k' + \nabla \bar{\mathbf{u}} : \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' - \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} \cdot \mathbf{u}') + \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} : \nabla \mathbf{u}' - \Delta (\nu k') + \nu \nabla \mathbf{u}' : \nabla \mathbf{u}' + \nabla \cdot (P' \mathbf{u}') = 0$$

Average kinetic energy of the fluctuation, k . Taking the average of the equation for the kinetic energy of the fluctuation...

$$\frac{\overline{Dk}}{\overline{Dt}} = \nabla \cdot (\nu \nabla k - \overline{\mathbf{u}'k'} - \overline{P'\mathbf{u}'}) - \nabla \overline{\mathbf{u}} : \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} - \nu \overline{\nabla \mathbf{u}'} : \overline{\nabla \mathbf{u}'}$$

Source contributions:

- turbulent energy «production», $\mathcal{P} := -\nabla \overline{\mathbf{u}} : \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$. This contribution has no defined sign. It appears with the opposite side in the equation of the kinetic energy of the average field: thus, it could be interpreted as a term that (mainly?) removes energy from the average flow to produce turbulent kinetic energy
- viscous dissipation (always non positive), $\mathcal{D} := -\nu \overline{\nabla \mathbf{u}'} : \overline{\nabla \mathbf{u}'} \leq 0$

Flux contributions: ...

$$\frac{\overline{Dk}}{\overline{Dt}} = \nabla \cdot \Phi_k + \mathcal{P} - \mathcal{D}$$

Rearranging terms

$$\partial_t k + \overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla k + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}'k'}) + \nabla \overline{\mathbf{u}} : \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} - \Delta(\nu k) + \nu \overline{\nabla \mathbf{u}'} : \overline{\nabla \mathbf{u}'} + \nabla \cdot (\overline{P'\mathbf{u}'}) = 0$$

as

$$\overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla k' = \overline{(\overline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot \nabla k'} = \overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla k + \overline{\mathbf{u}' \cdot \nabla k'} = \overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla k + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}'k'})$$

Rearranging terms collecting divergence contributions,

$$\frac{\overline{Dk}}{\overline{Dt}} = \nabla \cdot (\nu \nabla k - \overline{\mathbf{u}'k'} - \overline{P'\mathbf{u}'}) - \nabla \overline{\mathbf{u}} : \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} - \nu \overline{\nabla \mathbf{u}'} : \overline{\nabla \mathbf{u}'}$$

10.1.3 Dimensional analysis and the assumption of turbulence in equilibrium

A dimensional analysis of the equations of the kinetic energy of the average flow and turbulent energy helps in stating the concept of *turbulence in equilibrium* and its consequences.

Kinetic energy of the average field.

$$\frac{U^2}{T} \frac{\overline{DK_{\overline{\mathbf{u}}}}}{\overline{Dt}} = \frac{1}{L} \nabla \cdot \left(\frac{\nu U^2}{L} \nabla K_{\overline{\mathbf{u}}} - \mathcal{P} L \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} \cdot \overline{\mathbf{u}} - P U \overline{P \overline{\mathbf{u}}} \right) + \mathcal{P} \nabla \overline{\mathbf{u}} : \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} - \frac{\nu U^2}{L^2} \nabla \overline{\mathbf{u}} : \nabla \overline{\mathbf{u}}$$

Without an independent time scale, $T = \frac{L}{U}$, and in incompressible flows $P = U^2$ ³, and dividing for $\frac{U^3}{L}$

$$\frac{\overline{DK_{\overline{\mathbf{u}}}}}{\overline{Dt}} = -\nabla \cdot (\overline{P \overline{\mathbf{u}}}) + \frac{\nu}{UL} \{ \nabla \cdot (\nabla K_{\overline{\mathbf{u}}}) - \nabla \overline{\mathbf{u}} : \nabla \overline{\mathbf{u}} \} - \frac{\mathcal{P} L}{U^3} \{ \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} \cdot \overline{\mathbf{u}}) + \nabla \overline{\mathbf{u}} : \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} \}$$

Turbulence is a phenomenon that occurs at high Reynolds numbers, i.e. with $\frac{\nu}{UL} = \frac{1}{Re} \rightarrow 0$. If the other contributions have the same order of magnitude, it follows that $\mathcal{P} = \frac{U^3}{L}$.

Turbulent energy.

$$\frac{u^2}{T} \frac{\overline{Dk}}{\overline{Dt}} = \frac{1}{L} \nabla \cdot \left(\frac{\nu u^2}{L} \nabla k - u^3 \overline{\mathbf{u}'k'} - p u \overline{P'\mathbf{u}'} \right) - \mathcal{P} \nabla \overline{\mathbf{u}} : \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} - \mathcal{D} \overline{\nabla \mathbf{u}'} : \overline{\nabla \mathbf{u}'},$$

³ Remember that, with some notational abuse, in this section $P = \frac{p}{\rho}$.

with $\mathcal{D} = \frac{\nu U^2}{L^2}$.

Turbulence in equilibrium means $\mathcal{P} = \mathcal{D}$ and thus

$$\mathcal{P} = \mathcal{D} = \frac{U^3}{L} .$$

10.2 Scales of turbulence

Kolmogorov scales: large, inertial, viscous scales

Power-law for inertial scales...

Turbulence involves different characteristic scales¹, with their own characteristic length, time and relevant physical processes. While large scales usually depends on the geometry of the flow, smaller scales have universal features for different flows: within this universal range, inertial subrange and dissipation range can be identified.

Large scales.

Inertial subrange. Assumption: turbulence in equilibrium. Spectral energy density $E(\kappa)$ ² is written as a function of dissipation ε (equal to production, in equilibrium), and a length scale ℓ or a wave number κ . From dimensional analysis

$$[E(\kappa)] = \text{L}^3 \text{T}^{-2} \quad , \quad [\varepsilon] = \text{L}^2 \text{T}^{-3} \quad , \quad [\kappa] = \text{L}^{-1} \quad ,$$

it follows

$$E \propto \varepsilon^{\frac{2}{3}} \kappa^{-\frac{5}{3}}$$

Dimensional analysis

From

$$E = \varepsilon^\alpha \kappa^\beta \quad ,$$

it follows

$$\begin{cases} 3 = 2\alpha - \beta \\ -2 = -3\alpha \end{cases}$$

and thus $\alpha = \frac{2}{3}$ and $\beta = \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3}$.

Kolmogorov scales. Two relevant physical quantities: ν kinematic viscosity, average rate of dissipation per unit-mass ε or \mathcal{D} , with physical dimensions

$$[\nu] = \frac{\text{L}^2}{\text{T}} \quad , \quad [\mathcal{D}] = \frac{\text{L}^2}{\text{T}^3} .$$

With these two relevant physical quantities, it's possible to build characteristic length, time, velocity and Reynolds number (built with the characteristic dimensions, no surprise it goes to 1)

$$\ell_\eta := \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad , \quad \tau_\eta := \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad U_\eta := \frac{\ell_\eta}{\tau_\eta} = (\nu\varepsilon)^{\frac{1}{4}} \quad , \quad Re_\eta := \frac{U_\eta \ell_\eta}{\nu} = 1$$

¹ Roughly speaking, the characteristic dimension, velocity,... of the vortices. But what's a vortex?

² Spectral energy density is defined as the energy density per unit wave-length, $E = \int_{\kappa=0}^{+\infty} E(\kappa) d\kappa$, and so it has physical dimension $[E(\kappa)] = [E][L] = \text{L}^3 \text{T}^{-2}$.

todo evaluate the ratio of characteristic dimension of the viscous range with the characteristic dimension of the problem in terms of Reynolds' number. Which assumptions to be made to get a Reynolds number of the large scales? Especially about ε .

Under the assumption of *turbulence in equilibrium*, dimensional analysis gives

$$\varepsilon = \frac{U^3}{L},$$

and thus

$$\frac{\ell_\eta}{L} = \text{Re}^{-\frac{3}{4}}, \quad \frac{\tau_\eta}{T} = \text{Re}^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{U_\eta}{U} = \text{Re}^{-\frac{1}{4}}.$$

These relation gives an estimate of the spatial resolution — i.e. the dimension of the mathematical problem — required by a numerical methods to fully resolve all the structures in the flow. In a 3-dimensional domain of side L , grid spacing should be of order $\Delta x \sim \ell_\eta \sim L \text{Re}^{-\frac{3}{4}}$, and thus the number of grid cells approximately $N \sim \left(\frac{L}{\ell_\eta}\right)^3 = \text{Re}^{\frac{9}{4}}$.

10.3 Boundary layer flows

10.3.1 Prandtl equations

Steady RANS equations for a 2-dimensional flow using Cartesian coordinates read

$$\begin{cases} u\partial_x u + v\partial_y u + \partial_x \overline{u'u'} + \partial_y \overline{u'v'} - \nu(\partial_{xx} u + \partial_{yy} u) + \frac{1}{\rho} \partial_x P = 0 \\ u\partial_x v + v\partial_y v + \partial_x \overline{u'v'} + \partial_y \overline{v'v'} - \nu(\partial_{xx} v + \partial_{yy} v) + \frac{1}{\rho} \partial_y P = 0 \\ \partial_x u + \partial_y v = 0 \end{cases}$$

...

$$\begin{cases} u\partial_x u + v\partial_y u + \partial_y (\overline{u'v'}) - \nu\partial_{yy} u + \partial_x P = 0 \\ \partial_y \overline{v'^2} + \partial_y P = 0 \\ \partial_x u + \partial_y v = 0, \end{cases}$$

As the Reynolds' number increases, the effect of the viscosity in the average flow may become negligible (for flows without solid surfaces, where viscous sublayer exists) if compared with the Reynolds' stress. In these situations, Prandtl equations become

$$\begin{cases} u\partial_x u + v\partial_y u + \partial_y (\overline{u'v'}) + \partial_x P = 0 \\ \partial_y \overline{v'^2} + \partial_y P = 0 \\ \partial_x u + \partial_y v = 0, \end{cases}$$

10.3.2 Self-similar boundary layer flows

Planar jet

From the y -component of the momentum, $P + \overline{v'^2} = P_0(x)$, and 1) if the fluctuation becomes negligible in the outer flow and 2) the outer flow is irrotational with uniform velocity, then pressure is uniform in the whole domain, $P_0(x) = P_0$, and Prandtl equations from turbulent flows become

$$\begin{cases} u\partial_x u + v\partial_y u + \partial_y (\overline{u'v'}) = 0 \\ \partial_x u + \partial_y v = 0, \end{cases}$$

Self-similar solution. Looking for a self-similar solution

$$\begin{aligned} u(x, y) &= U(x)f(\eta(x, y)) \\ \overline{u'v'}(x, y) &= U^2(x)g(\eta(x, y)) , \end{aligned}$$

with $\eta(x, y) = \frac{y}{\delta(x)}$. Through the incompressibility constraint, the y -component of the velocity reads

$$\begin{aligned} v(x, y) - \underbrace{v(x, 0)}_{=0} &= \int_{t=0}^y \partial_y v(x, t) dt = \\ &= - \int_{t=0}^y \partial_x u(x, t) dt = \\ &= \int_{t=0}^y \left\{ -U'(x)f(\eta(x, t)) + U(x) \frac{df}{d\eta}(\eta(x, t)) \frac{t\delta'(x)}{\delta^2(x)} \right\} dt = \\ &= \int_{\chi=0}^{\eta} \left\{ -U'(x)f(\eta(x, \delta(x)\chi))\delta(x) + U(x) \frac{df}{d\eta}(\eta(x, \delta(x)\chi))\chi\delta'(x) \right\} d\chi , \end{aligned}$$

being

$$\partial_x u(x, y) = U'(x)f(\eta(x, y)) - U(x)f'(\eta(x, y)) \frac{y\delta'(x)}{\delta^2(x)} ,$$

and having transformed the variable $\chi = \frac{t}{\delta}$, and the extremes of integration accordingly.

Mass, momentum and energy fluxes across normal planes. Momentum flux reads

$$Q(x) = \int_{y=0}^{+\infty} u^2(x, y) dy .$$

Its derivative w.r.t. x reads

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} Q(x) &= \frac{d}{dx} \int_{y=-\infty}^{+\infty} u^2(x, y) dy = \\ &= \int_{y=-\infty}^{+\infty} \partial_x u^2 dy = \\ &= - \int_{y=-\infty}^{+\infty} \partial_y \{ uv + \overline{u'v'} \} dy = 0 , \end{aligned}$$

if the flow is at rest at infinity. Using the self-similar assumption, this derivative reads

$$0 = \frac{dQ}{dx} = \frac{d}{dx} \left[U^2(x)\delta(x) \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} f^2(\eta) d\eta \right] ,$$

so that it follows

$$0 = \frac{d}{dx} (U^2(x)\delta(x)) = 2UU'\delta + U^2\delta' ,$$

or

$$U' = -\frac{\delta'}{2\delta}U .$$

Mass flux.

$$M(x) = \int_{y=-\infty}^{+\infty} u(x, y) dy ,$$

and, if the self-similarity assumption holds, its derivative reads

$$\frac{d}{dx} M(x) = \frac{d}{dx} (U(x)\delta(x)) \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} f(\eta) d\eta .$$

Energy flux.

$$E(x) = \int_{y=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} u^3(x, y) dy ,$$

and, if the self-similarity assumption holds, its derivative reads

$$\frac{d}{dx} E(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} U^3(x)\delta(x) \right) \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} f(\eta) d\eta .$$

Solving for the self-similar solution. Inserting the expressions of the velocity components and the turbulent stress into the x -component of the momentum equation,

$$\begin{aligned} 0 &= (Uf) \left(U'f - Uf'\eta \frac{\delta'}{\delta} \right) + \int_{\chi=0}^{\eta} \{ -U'f\delta + Uf'\chi\delta' \} d\chi Uf' \frac{1}{\delta} + U^2 g' \frac{1}{\delta} = \\ &= UU'f^2 - U^2 f f' \eta \frac{\delta'}{\delta} - UU'f' \int_{\chi=0}^{\eta} f d\chi + U^2 f' \frac{\delta'}{\delta} \left(\chi f \Big|_0^{\eta} - \int_{\chi=0}^{\eta} f d\chi \right) + U^2 g' \frac{1}{\delta} = \\ &= UU'f^2 - UU'f' \int_{\chi=0}^{\eta} f d\chi - U^2 f' \frac{\delta'}{\delta} \int_{\chi=0}^{\eta} f d\chi + U^2 g' \frac{1}{\delta} , \end{aligned}$$

and introducing the relation between the derivative of $U(x)$ and $\delta(x)$, and dividing by $\frac{U^2}{\delta}$

$$\frac{\delta'(x)}{2} \left[f^2(\eta) + f'(\eta) \int_{\chi=0}^{\eta} f(\chi) d\chi \right] = g'(\eta) .$$

For the existence of a self-similar solution, no coefficient can explicitly depend on x or y , so the derivative of the boundary layer thickness must be constant

$$\delta'(x) = S ,$$

and thus a linear spreading is found,

$$\delta(x) - \delta(x_0) = S(x - x_0) .$$

As the momentum flux is constant in x , it follows that — setting the origin of the coordinates so that $\delta(x) = Sx$ — the maximum velocity (velocity on the symmetry line of the jet) decreases as

$$U(x) \propto \delta(x)^{-\frac{1}{2}} \propto x^{-\frac{1}{2}} .$$

Mass flux goes with $M(x) \sim x^{\frac{1}{2}}$ (increases, **entrainment**), while the energy flux goes with $E(x) \sim x^{-\frac{1}{2}}$ (decreases due to dissipation).

Solution with constant turbulent viscosity as closure model. With the assumption

$$-\overline{u'v'} = \nu_T \partial_y u ,$$

using self-similarity ansatz

$$-U^2 g = \nu_T U f' \frac{1}{\delta} ,$$

and with the additional assumption (**non-physical**, just to get a problem that can be solved analytically. An assumption more, an assumption less...),

$$\hat{\nu}_T := \frac{\nu_T}{\delta(x)U(x)} = \text{const.} ,$$

the two non-dimensional functions $f(\eta)$ and $g(\eta)$ are related as

$$g(\eta) = -\hat{\nu}_T f'(\eta) .$$

Thus, the solution of the equation

$$\frac{S}{2} \left[f^2(\eta) + f'(\eta) \int_{\chi=0}^{\eta} f(\chi) d\chi \right] + \hat{\nu}_T f''(\eta) = 0 ,$$

with the proper boundary conditions provides the non-dimensional velocity profile. Introducing the function $F(\eta) = \int_{\chi=0}^{\eta} f(\chi) d\chi$,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{S}{2} (F'^2(\eta) + F''(\eta)F(\eta)) + \hat{\nu}_T F'''(\eta) = \\ &= \frac{S}{2} (F(\eta)F'(\eta))' + \hat{\nu}_T F'''(\eta) . \end{aligned}$$

Integrating once, and exploiting the boundary conditions (**todo...**)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{S}{2} F(\eta)F'(\eta) + \hat{\nu}_T F''(\eta) = \\ &= \frac{S}{4} (F^2(\eta))' + \hat{\nu}_T F''(\eta) , \end{aligned}$$

and integrating once again with the boundary condition $F'(0) = 1$,

$$\frac{S}{4} F^2(\eta) = \hat{\nu}_T (1 - F'(\eta)) ,$$

or

$$F'(\eta) = 1 - \frac{S}{4\hat{\nu}_T} F^2(\eta) .$$

Integrating one last time,

$$F(\eta) = \frac{1}{\alpha} \tanh(\alpha\eta) ,$$

with $\alpha = \sqrt{\frac{S}{4\hat{\nu}_T}}$.

10.4 Exercises

Exercise 10.1

Parte II

Compressible Fluid Mechanics

Introduction to Compressible Fluid Mechanics

Governing Equations

- From compressible *Navier-Stokes equations*, to *Euler equations* for compressible fluids with negligible viscosity and heat conduction effects. Under these assumptions, the diffusive parts of the equations disappear, and discontinuities (e.g. *normal shocks*, *oblique shocks*, or contact discontinuities) may appear in the field: as fields are not differentiable and not even continuous across a discontinuity, differential equations fail and *jump conditions* from integral equations are required to connect 2 regions of smooth fields.
- The definition of *ideal flow* requires the additional assumption of absence of shocks, beside negligible viscosity and heat conduction. Without shocks, differential equations hold in the whole domain and *entropy equation* shows that the flow is homentropic, $s(\mathbf{r}, t) = \bar{s}$, if the inflow is uniform.
- If the flow is also irrotational, the governing equations can be written as a PDE for *kinetic potential*. Without shocks, differential equations hold in the whole domain and *vorticity equation* shows that the flow is irrotational in the whole domain if the inflow is irrotational.
- *Acoustics* ...linearized equations...

Integral and differential form of the governing equations are provided, along with **jump conditions**: jump conditions play a crucial role in compressible inviscid flows governed by Euler equations where discontinuities (shocks and contact discontinuities) appear as a result of vanishing diffusion terms, in the limit of negligible viscous stress and heat conduction.

Vorticity, entropy and Bernoulli theorems

Vorticity equation and entropy equation are discussed in detail in order to use them and their conclusions in different models of a flow.

- *Vorticity equation*
- *Entropy equation*
- *Bernoulli equation*

Mathematical nature of equations of physics

The (local) mathematical nature of the problem depends on the (local) value of the Mach number. As an example, for Euler equations¹ and derived models

- in subsonic regions:
 - in steady condition, the governing equations are elliptic
 - in unsteady condition, the governing equations are hyperbolic
- in supersonic regions:
 - in steady conditions, the governing equations are hyperbolic
 - in unsteady conditions, the governing equations are hyperbolic

As an example, the mathematical nature of governing equations of steady flows naturally appears as a function of the (local) Mach number M :

- in the potential equation for irrotational homo-entropic flows. The (global) nature of the *linearized potential equation* depends on the Mach number of the reference flow M_∞ ;
- in the characteristic method for steady compressible flows (**todo** *collect all the material, now here and there, e.g. in Math:PDE:hyperbolic equations*): in a d -dimensional domain, $d + 2$ families of characteristic surfaces exist in supersonic regions, while only d families exist in subsonic flows. Thus, it's not possible to use the method of characteristics: the solution in a point P is not function of the values of $d + 2$ variables on the $d + 2$ characteristic lines through P , but depends on the solution in its neighborhood (typical condition for elliptic equations).

Introduction to hyperbolic problems:

- Link to Math jbook: hyperbolic problems, method of characteristics, integral balance, jumps,...
- include script available on GDrive in `fvm` folder

Canonical flows

- 1-dimensional ideal flow
- *quasi 1-dimensional flows*
- (*quasi*) *1-dimensional non-ideal flows*: with friction (Fanno), and with heat flux (Rayleigh)
- 2-dimensional flows:
 - shocks: *normal shocks* and *oblique shocks* ($\theta - \beta - M$)
 - rarefaction waves: *Prandtl-Meyer expansion*
 - discontinuities

¹ Dissipative terms make Navier-Stokes equations elliptic in steady conditions and parabolic in unsteady conditions.

Acoustics

12.1 Compressible Navier-Stokes equations

Integral balance equations

Integral balance equations of mass (Lavoisier principle), momentum (Second principle of Newton dynamics) and total energy (Principle of energy conservation) for a control volume V at rest read

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho + \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \int_V \rho \mathbf{g} + \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho e^t + \oint_{\partial V} \rho e^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \end{aligned}$$

Differential balance equations

Differential balance equations in conservative form follow from regularity of the functions involved in the equations and from the arbitrariness of the control volume V

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbb{T} \\ \partial_t (\rho e^t) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} e^t) &= \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q}, \end{aligned}$$

being

- \mathbb{T} the stress tensor, relating stress vector \mathbf{t}_n on the a surface and unit normal $\hat{\mathbf{n}}$ of that surface via **Cauchy relation**, $\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T}$,
- e^t the total energy, $e^t = e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}$
- \mathbf{q} heat flux by conduction.

Constitutive equations and equations of state

The problem is completed with initial and boundary conditions, along with constitutive equations and equations of state. As an example:

- A **Newtonian fluid** is defined by the constitutive equation for stress

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{S} = -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbb{I},$$

being p the pressure field, μ , λ viscosity coefficients, and \mathbb{D} the deformation velocity tensor. In general, they are function of the thermodynamic state.

- **Fourier law** for heat flux by conduction for an isotropic medium reads

$$\mathbf{q} = -k\nabla T.$$

- **Equations of state** relate non-dynamical physical variables to the dynamical variables, to get a well-defined problem from the mathematical point of view with the same number of equations and unknowns. A pair of independent thermodynamic variables are required to define a thermodynamic state. As an example, using (ρ, e) as the pair of independent thermodynamic variables (fields here, with the local equilibrium assumption), equations of state need to provide the expression of pressure and temperature (and viscosity and conduction coefficients, if they can't be treated as constant parameters),

$$p(\rho, e), \quad T(\rho, e), \quad \dots$$

12.2 Euler equations

Neglecting viscosity and heat conduction, diffusive contributions (usually containing second-order spatial derivatives of the unknowns) drop and Navier-Stokes equations become Euler equations. Where differential equations hold (in absence of shocks and discontinuities), local governing equations read

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p\mathbb{I}) &= \rho \mathbf{g} \\ \partial_t (\rho e^t) + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u} \left(e^t + \frac{p}{\rho} \right) \right) &= \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Constitutive equations. There's no need to constitutive equations for viscous stress and heat flux by conduction.

Equations of state. Two thermodynamic variables (fields) have dynamical equations (in the conservative form, density and total energy (ρ, e^t)), while **only one** other thermodynamic variable doesn't have a dynamical equation, here pressure field p . Thus, **only one equation of state** is required to write a well-defined mathematical problem

$$p(\rho, e),$$

while other dependent thermodynamic variables (fields), like temperature T , can be retrieved a posteriori once the problem is solved.

12.3 Ideal flow

The definition of an ideal flow immediately follows from the *entropy equation*: in a fluid with negligible viscosity and heat conduction, where no shock occurs (and thus where differential equations hold in the whole domain), the entropy of each material particle is constant.

12.4 Other form of the governing equations

Potential equation for irrotational compressible flows. Some flow of interest - e.g. in aeronautics - are irrotational flow. It can be proved with *vorticity equation* that an irrotational inflow produces irrotational flow in the whole domain, if viscoisty effects are negligible and no oblique shock occurs.

- *Perfect Ideal Gas (PIG)*
- *Real Gas - Van der Waals*

13.1 Perfect Ideal Gas (PIG)

todo Add details, and link to *Thermodynamics* to deal with thermodynamic potentials, coefficients and derivatives in the most general way

Equation of state.

$$p = \rho RT ,$$

with $R = \frac{R_u}{M_m}$, being M_m the molar mass of the gas and R_u the **universal gas constant**

$$R_u = 8134.46 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}} .$$

Example 13.1.1 (Molar mass of dry air - mixture of gas)

Let the composition of dry air: N₂ : 78.08%, O₂ : 20.95%, Ar : 0.93%, CO₂ : 0.04%

...

$$M_{m,air} = 28.97 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} .$$

Thus the value of gas constant for dry air is

$$R_{air} = \frac{R_u}{M_{m,air}} = \frac{8134.46 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}}}{28.97 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}} = 287.00 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} .$$

Internal energy and enthalpy. In perfect ideal gas, energy and enthalpy are function of temperature only, with constant heat coefficients c_v, c_p

$$e = c_v T$$

$$h = c_p T$$

Heat coefficient ratio.

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Meyer relation.

$$c_p - c_v = R$$

Thus,

$$\frac{c_v}{R} = \frac{1}{\gamma - 1}$$

$$\frac{c_p}{R} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

Entropy. Starting from the first principle of thermodynamics

$$de = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho,$$

with $de = c_v dT$, it's possible to write the differential of entropy as

$$ds = c_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho} =$$

$$= c_v \frac{dp}{p} - c_p \frac{d\rho}{\rho} =$$

$$= c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p},$$

having used the equation of state, Meyer relation and the relation between differentials of thermodynamic quantities, like

$$\frac{dT}{T} = \frac{d\left(\frac{p}{\rho R}\right)}{\frac{p}{\rho R}} = \frac{\rho}{p} \left(\frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho^2} d\rho \right) = \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho}.$$

The finite difference between two thermodynamic states immediately follows from integration (being R, c_v, c_p constant for a PIG),

$$s - s_0 = c_v \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - R \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) =$$

$$= c_v \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) - c_p \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) =$$

$$= c_p \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - R \ln \left(\frac{p}{p_0} \right),$$

Speed of sound. The speed of sound in a medium is defined as¹

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s.$$

¹ The definition of the speed of sound naturally appears in acoustics and in the method of characteristic for hyperbolic problems, like unsteady Euler equations...

For a PIG, relation (**todo Add ref**) links pressure, density and entropy. This relation can be recast as

$$\frac{p}{p_0}(\rho, s; \rho_0, s_0) = \frac{\rho^\gamma}{\rho_0^\gamma} e^{(\gamma-1) \frac{s-s_0}{R}} .$$

Direct evaluation of the partial derivative at constant s gives the expression of speed of sound for a PIG

$$a^2 = \gamma RT = \gamma \frac{p}{\rho}$$

Details

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right)_s \frac{\rho^\gamma}{\rho_0^\gamma} e^{(\gamma-1) \frac{s-s_0}{R}} = \\ &= \gamma \rho^{-1} \frac{\rho^\gamma}{\rho_0^\gamma} e^{(\gamma-1) \frac{s-s_0}{R}} = \\ &= \gamma \frac{p}{\rho} = \\ &= \gamma RT . \end{aligned}$$

13.2 Real Gas - Van der Waals

Continuous medium. Jump conditions for a continuous medium read

$$\begin{aligned} 0 &= [\rho u_n^{rel}] \\ \mathbf{0} &= \dot{m}[\mathbf{u}] - [\mathbf{t}_n] \\ 0 &= \dot{m}[e^t] + [\mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q}], \end{aligned}$$

being $\dot{m} = \rho_1 u_{n,1}^{rel} = \rho_2 u_{n,2}^{rel}$.

Inviscid flows, w/o heat conduction (Euler equations). If viscous stress and heat conduction are negligible (as they're in Euler equations), jump conditions become

$$\begin{aligned} 0 &= [\rho u_n^{rel}] \\ \mathbf{0} &= \dot{m}[\mathbf{u}] + [p\mathbf{n}] \\ 0 &= \dot{m}[h^t] + [p]\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}_s. \end{aligned}$$

Details

Starting from integral equations

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho + \oint_{\partial v_t} \rho \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial v_t} \rho \mathbf{u} \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \int_{v_t} \rho \mathbf{g} + \oint_{\partial v_t} \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho e^t + \oint_{\partial v_t} \rho e^t \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \int_{v_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \oint_{\partial v_t} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{\partial v_t} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

and collapsing the volume v_t on one of its dimension, volume contributions become negligible when compared to surface contributions. Jump conditions immediately follow, setting $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_2 = -\hat{\mathbf{n}}_1$,

$$\begin{aligned} 0 &= [\rho u_n^{rel}] \\ \mathbf{0} &= [\rho \mathbf{u} u_n^{rel} - \mathbf{t}_n] \\ 0 &= [\rho e^t u_n^{rel} + \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q}] \end{aligned}$$

Thus $\rho_1 u_{n,1}^{rel} = \rho_2 u_{n,2}^{rel} = \dot{m}$, and

$$\begin{aligned} 0 &= [\rho u_n^{rel}] \\ \mathbf{0} &= \dot{m}[\mathbf{u}] - [\mathbf{t}_n] \\ 0 &= \dot{m}[e^t] + [\mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q}] \end{aligned}$$

If viscous stress and conduction heat flux are negligible,

$$\begin{aligned} 0 &= [\rho u_n^{rel}] \\ \mathbf{0} &= \dot{m}[\mathbf{u}] + [p\mathbf{n}] \\ 0 &= \dot{m}[e^t] + [p\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}] = \\ &= \dot{m}[e^t] + \left[\frac{p}{\rho} \underbrace{\hat{\mathbf{n}} \cdot \rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s)}_{\rho u_n^{rel} = \dot{m}} + p\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}_s \right] = \\ &= \dot{m} \left[e^t + \frac{p}{\rho} \right] + [p\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}_s] = \\ &= \dot{m}[h^t] + [p] \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}_s \end{aligned}$$

Two main cases are determined by the value of the mass flow \dot{m} :

- if $\dot{m} = 0$,

$$\begin{aligned} \dot{m} &= 0 \\ [p] &= 0, \end{aligned}$$

while nothing can be said about the tangential component of the velocity field and the total enthalpy. These conditions hold **contact discontinuities**.

- if $\dot{m} \neq 0$

$$\begin{aligned} 0 &= [\dot{m}] = [\rho u_n^{rel}] \\ \mathbf{0} &= \dot{m}[\mathbf{u}_t] \\ 0 &= \dot{m}[u_n] + [p] = \dot{m}[u_n^{rel}] + [p] \\ 0 &= \dot{m}[h^{t,rel}] = \dot{m}[h_n^{t,rel}] \end{aligned}$$

These conditions hold for **shocks** (usually compression shocks, e.g. for PIG, but for heavy fluids expansion shocks may exist as well).

Details

$$\begin{aligned}
 0 &= [\dot{m}] = [\rho u_n^{rel}] \\
 \mathbf{0} &= \dot{m}[\mathbf{u}_t] \\
 0 &= \dot{m}[u_n] + [p] = & ([u_s] = 0) \\
 &= \dot{m}[u_n - u_s] + [p] = \\
 &= \dot{m}[u_n^{rel}] + [p] \\
 0 &= \dot{m}[h^t] + u_{s,n}[p] = \\
 &= \dot{m}[h^t] - u_{s,n}\dot{m}[u_n] = \\
 &= \dot{m}\left[h + \frac{u_n^2 + u_t^2}{2} - u_{s,n}u_n\right] = \\
 &= \dot{m}\left[h + \frac{u_n^2 - 2u_{s,n}u_n + u_{s,n}^2}{2} - \frac{u_{s,n}^2}{2} + \frac{u_t^2}{2}\right] = \\
 &= \dot{m}\left[h + \frac{(u_n - u_{s,n})^2}{2} - \frac{u_{s,n}^2}{2} + \frac{u_t^2}{2}\right] = \\
 &= \dot{m}[h^{t,rel}] = \\
 &= \dot{m}[h_n^{t,rel}] ,
 \end{aligned}$$

as $[u_{s,n}^2] = 0$ being $u_{s,n}$ the velocity of the «discontinuity» surface, $[\mathbf{u}_t] = 0$ from the tangential component of the momentum equation, and with the definition of the *relative total enthalpy*

$$h_n^{t,rel} := h + \frac{1}{2}((u_n - u_{s,n})^2 + u_t^2) = h + \frac{1}{2}((u_n^{rel})^2 + u_t^2) ,$$

and $h_n^{t,rel}$ the relative total enthalpy built with the normal component of the relative velocity only.

Bernoulli's theorem in compressible fluid mechanics

Assuming no discontinuity occurs in physical quantities (reasonable for viscous and diffusive fluids?), the differential form of governing equations holds. Starting from governing equations of compressible fluids,

$$\begin{aligned}\frac{D\rho}{Dt} &= -\rho\nabla \cdot \mathbf{u} \\ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \rho\mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbb{T} \\ \rho \frac{De^t}{Dt} &= \rho\mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q}\end{aligned}$$

with the stress tensor sum of a pressure and viscous contribution, $\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{S}$. For Newtonian fluids, viscous stress tensor can be written as

$$\mathbb{S} = 2\mu\mathbb{D} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbb{I}.$$

Total energy per unit mass e^t is the sum of internal and kinetic energy, $e^t = e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}$. Total derivative operator reads

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$$

Total energy equation can be recast as

$$\rho\mathbf{u} \cdot \left[\nabla e^t - \mathbf{g} - \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \mathbb{T} \right] = -\rho \frac{\partial e^t}{\partial t} + \nabla \mathbf{u} : \mathbb{T} - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

Keeping only conservative (pressure) contributions to stress on the LHS

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{u} \cdot \left[\nabla e^t - \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \nabla P \right] &= -\rho \frac{\partial e^t}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbb{S} - P \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} : \mathbb{S} - \nabla \cdot \mathbf{q} \\ \rho \mathbf{u} \cdot \left[\nabla e^t + \nabla \chi + \frac{1}{\rho} \nabla P \right] &= -\rho \frac{\partial e^t}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbb{S} + \frac{P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \mathbf{u} : \mathbb{S} - \nabla \cdot \mathbf{q} \\ \rho \mathbf{u} \cdot \left[\nabla e^t + \nabla \chi + \frac{1}{\rho} \nabla P \right] &= -\rho \frac{\partial e^t}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbb{S} + \frac{P}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{P}{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \nabla \mathbf{u} : \mathbb{S} - \nabla \cdot \mathbf{q} \\ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \left[e^t + \chi + \frac{P}{\rho} \right] &= -\rho \frac{\partial e^t}{\partial t} + \frac{P}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbb{S} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \\ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \left[e^t + \chi + \frac{P}{\rho} \right] &= -\rho \frac{\partial e^t}{\partial t} + \underbrace{\frac{P}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho \frac{\partial P}{\partial t} + \rho \frac{\partial P}{\partial t}}_{=-\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{\rho} \right)} + \nabla \cdot (\mathbb{S} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \\ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \left[e^t + \chi + \frac{P}{\rho} \right] &= -\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(e^t + \frac{P}{\rho} \right) + \rho \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbb{S} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \end{aligned}$$

Theorem (Bernoulli's theorem for compressible flow on streamlines)

Now, for steady flows $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$, with negligible viscous stress $\mathbb{S} \equiv \mathbb{0}$ and heat conduction $\mathbf{q} \equiv \mathbf{0}$, **Bernoulli's polynomial is constant for every point of a streamline**, as

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \left[e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \chi \right] = 0.$$

Theorem (Dynamical equation for total enthalpy)

Governing equations of fluid mechanics can be recast to get a dynamical equation for the total enthalpy $h^t = e^t + \frac{P}{\rho}$, whose convective form reads

$$\rho \frac{Dh^t}{Dt} = -\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \chi + \rho \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbb{S} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q}).$$

Theorem (Dynamical equation for Bernoulli's polynomial)

If the conservative force field per unit mass $\mathbf{g} = -\nabla \chi$ has no explicit dependence on time, $\partial_t \chi = 0$ and $D_t \chi = \mathbf{u} \cdot \nabla \chi$, it's possible to write a dynamical equation for the Bernoulli's polynomial, $B = h^t + \chi$,

$$\rho \frac{DB}{Dt} = \rho \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbb{S} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q}),$$

Vorticity equation

A differential equation governing vorticity can be derived starting from the momentum equation. Starting from the convective form of the momentum equation

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot [-p \mathbb{I} + 2\mu \mathbb{D} + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbb{I}] = \\ &= \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} [2\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})] . \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} 2\nabla \cdot \mathbb{D} &= \partial_i (\partial_i u_j + \partial_j u_i) = u_{j/ji} + u_{i/jj} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot ((\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbb{I}) &= \partial_k (u_{l/l} \delta_{ki}) = u_{l/li} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) . \end{aligned}$$

Taking the curl of the momentum equation above, vorticity equation follows

$$\begin{aligned} \partial_t \boldsymbol{\omega} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) &= -\nabla \times \frac{\nabla p}{\rho} + \dots \\ \partial_t \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \dots , \end{aligned}$$

or, highlighting the material derivative,

$$D_t \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \dots .$$

Vector calculus identities

$$\begin{aligned} \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= a_{i/j} b_i + a_i b_{i/j} \\ (\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \partial_l a_m b_k = \\ &= (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) \partial_l a_m b_k = \\ &= a_{i/k} b_k - a_{k/i} b_k = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} - \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

Thus, $(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u}$ can be written as

$$(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2},$$

so that the advective term can be recast as $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} - \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}$,

being $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ the vorticity field. Using vector calculus identity

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} (a_l b_m) = \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j (a_l b_m) = \\ &= a_{i/j} b_j + a_i b_{j/j} - a_{j/j} b_i - a_j b_{i/j} = \\ &= \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} + \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \nabla \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b}. \end{aligned}$$

and recalling that the curl of a gradient is identically zero, the curl of the advective term reads

$$\begin{aligned} \nabla \times [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] &= \nabla \times \left[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right] = \\ &= \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}}_{=0 \text{ div curl}=0} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}. \end{aligned}$$

The curl of a Laplacian reads

$$\{\nabla \times \nabla^2 \mathbf{u}\}_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_{ll} u_k = \partial_{ll} (\varepsilon_{ijk} \partial_j u_k) = \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{u}).$$

The curl of the product of a scalar and vector field reads

$$\nabla \times (a\mathbf{v}) = \varepsilon_{ijk} \partial_j (a v_k) = \varepsilon_{ijk} (a_{/j} v_k + a v_{k/j}) = \nabla a \times \mathbf{v} + a \nabla \times \mathbf{v}.$$

16.1 Vorticity and entropy

Starting from the potentials, and $dh = d\left(e + \frac{p}{\rho}\right) = de + \frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho^2} d\rho$,

$$de = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

$$dh = T ds + \frac{dp}{\rho}$$

and taking the gradient,

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla h - T \nabla s.$$

Using the momentum equation to replace the first term,

$$\begin{aligned} \frac{\nabla p}{\rho} &= -D_t \mathbf{u} + \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbb{S} = \\ &= -\partial_t \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} - \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} - \nabla \chi + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbb{S}, \end{aligned}$$

it follows

$$\mathbf{0} = \partial_t \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \nabla \left[h + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \chi \right] + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbb{S} - T \nabla s$$

Steady condition, inviscid flows. If $\partial_t \equiv 0$ and $\mathbb{S} \equiv \mathbb{0}$, it follows

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \nabla \left[h + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \chi \right] - T \nabla s .$$

todo *Rotational flow behind an oblique shock*

Scalar multiplication by $\rho \mathbf{u} \cdot$ and transforming back the gradient of the entropy field as a function of the gradient of the internal energy and density,

$$\begin{aligned} 0 &= \rho \partial_t \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla [h^t + \chi] + \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbb{S} - T \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s = \\ &= \dots \end{aligned}$$

todo *Going back to Bernoulli...*

Differential equation.

$$\begin{aligned}
 \rho D_t s &= \frac{1}{T} \left[\rho D_t e - \rho \frac{P}{\rho^2} D_t \rho \right] = \\
 &= \frac{1}{T} \left[-p \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbb{S} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{P}{\rho} (-\rho \nabla \cdot \mathbf{u}) \right] = \\
 &= \frac{1}{T} \left[2\mu |\mathbb{D}|^2 + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \nabla \cdot (k \nabla T) \right] = \\
 &= \frac{2\mu |\mathbb{D}|^2 + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u})^2}{T} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \\
 &= \frac{2\mu |\mathbb{D}|^2 + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u})^2}{T} + \frac{k |\nabla T|^2}{T^2} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) .
 \end{aligned}$$

Potential equation for irrotational compressible flows

Under the assumption of irrotational flow¹, the velocity field $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ can be written as a gradient of a scalar potential $\phi(\mathbf{r}, t)$,

$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{u} = \nabla \phi .$$

Euler equations in convective form with independent variables (ρ, \mathbf{u}, s) read²

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \partial_t \mathbf{u} + \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \frac{\nabla p}{\rho} &= \mathbf{0} \\ \partial_t s + \mathbf{u} \cdot \nabla s &= 0 . \end{aligned}$$

18.1 Homentropic flows

If no shock occurs and the inflow is uniform, the flow is homentropic, $s(\mathbf{r}, t) = \bar{s}$. Mass and momentum equations become

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \phi \cdot \nabla \rho + \rho \nabla^2 \phi &= 0 \\ \partial_t \nabla \phi + \nabla \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + a^2(\rho, \bar{s}) \frac{\nabla \rho}{\rho} &= \mathbf{0} , \end{aligned}$$

being $a^2(\rho, \bar{s}) = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$ the square of the speed of sound.

¹ Vorticity is confined in thin layers, like boundary layers and wakes, modelled as tangential velocity discontinuities.

² $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \omega \times \mathbf{u}$, with $\omega = \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ in irrotational flows.

Momentum equation

Momentum equation can be manipulated as

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \partial_t \mathbf{u} + \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \frac{\nabla p}{\rho} = \\ &= \partial_t \nabla \phi + \nabla \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \frac{\nabla p}{\rho} = \\ &= \partial_t \nabla \phi + \nabla \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \nabla h(\rho, \bar{s}) = \\ &= \nabla \left[\partial_t \phi + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + h(\rho, \bar{s}) \right], \end{aligned}$$

and thus

$$\partial_t \phi + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + h(\rho, \bar{s}) = C(t),$$

for **homoentropic flows** $\nabla s = 0$, as the relation (**todo** *add link to thermodynamics*)

$$dh = T ds + \frac{dp}{\rho},$$

produces

$$dh = \frac{dp}{\rho}, \quad \nabla h = \frac{\nabla p}{\rho}.$$

todo

- Discuss if and why the function $C(t)$ can be included in the definition of « $\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t) + C(t)$ ».
- or With homogeneous and steady inflow,

$$\partial_t \phi(\mathbf{r}, t) + \frac{|\nabla \phi(\mathbf{r}, t)|^2}{2} + h(\rho(\mathbf{r}, t), \bar{s}) = \frac{|\mathbf{u}_\infty|^2}{2} + h_\infty.$$

Taking partial derivative in time

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{tt} \phi + \partial_t \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \partial_t h = \\ &= \partial_{tt} \phi + \partial_t \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \left(\frac{\partial h}{\partial \rho} \right)_s \partial_t \rho = \\ &= \partial_{tt} \phi + \partial_t \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \frac{a^2(\rho, \bar{s})}{\rho} \partial_t \rho, \end{aligned}$$

as

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \rho} \right)_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{a^2(\rho, \bar{s})}{\rho}.$$

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{tt} \phi + \partial_t \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \frac{a^2}{\rho} \partial_t \rho && \text{(mass: } \partial_t \rho = -\rho \nabla^2 \phi - \nabla \rho \cdot \nabla \phi) \\ &= \partial_{tt} \phi + \partial_t \frac{|\nabla \phi|^2}{2} - \frac{a^2}{\rho} \{ \nabla \phi \cdot \nabla \rho + \rho \nabla^2 \phi \} = && \text{(momentum: } a^2 \frac{\nabla \rho}{\rho} = - \left(\partial_t \nabla \phi + \nabla \frac{|\nabla \phi|^2}{2} \right)) \\ &= \partial_{tt} \phi + \partial_t \frac{|\nabla \phi|^2}{2} - a^2 \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \left(\partial_t \nabla \phi + \nabla \frac{|\nabla \phi|^2}{2} \right), \end{aligned}$$

or

$$0 = \partial_{tt} \phi - a^2 \nabla^2 \phi + \partial_t |\nabla \phi|^2 + \nabla \phi \cdot \nabla \frac{|\nabla \phi|^2}{2}.$$

18.1.1 Linearized equation

Assuming small perturbation of the asymptotic flow, with velocity \mathbf{u}_∞ and thermodynamic state TD_∞ with speed of sound a_∞^2 , the velocity field can be written as

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \sim \mathbf{u}_\infty + \mathbf{u}'(\mathbf{r}, t),$$

the potential as

$$\phi(\mathbf{r}, t) \sim \mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{r} + \varphi(\mathbf{r}, t),$$

and all the thermodynamic variables their linear Taylor expansion around the reference state

$$\rho = \rho_\infty + \rho'$$

...

Linearization of the potential equation gives

$$D_{tt}^{\mathbf{u}_\infty} \varphi - a_\infty^2 \nabla^2 \varphi = 0,$$

with the differential operator - here applied twice³ - $D_t^{\mathbf{u}_\infty} = \partial_t + \mathbf{u}_\infty \cdot \nabla$ representing advection with the free-stream velocity field \mathbf{u}_∞ .

Details

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{tt} \phi - a^2 \nabla^2 \phi + \partial_t |\nabla \phi|^2 + \nabla \phi \cdot \nabla \frac{|\nabla \phi|^2}{2} = \\ &= \partial_{tt} \varphi - (a_\infty^2 + a'^2) \nabla^2 \varphi + 2\partial_t (\nabla \phi \cdot \mathbf{u}_\infty + \dots) + \mathbf{u}_\infty \cdot \nabla (\mathbf{u}_\infty \cdot \nabla \varphi + \dots) \simeq \\ &= \partial_{tt} \varphi - a_\infty^2 \nabla^2 \varphi + 2\mathbf{u}_\infty \cdot \partial_t \nabla \phi + \mathbf{u}_\infty \cdot \nabla (\mathbf{u}_\infty \cdot \nabla \varphi). \end{aligned}$$

Introducing the *linear* differential operator

$$D_t^{\mathbf{u}_\infty} := \partial_t + \mathbf{u}_\infty \cdot \nabla,$$

the linearized equation can be re-written as

$$D_{tt}^{\mathbf{u}_\infty} \varphi - a_\infty^2 \nabla^2 \varphi = 0,$$

being $D_{tt}^{\mathbf{u}_\infty}$ the operator applied twice, $D_{tt}^{\mathbf{u}_\infty} = D_t^{\mathbf{u}_\infty} D_t^{\mathbf{u}_\infty}$.

Introducing a set of Cartesian coordinates with the $\hat{\mathbf{x}}$ -axis aligned with the free-stream velocity $\mathbf{u}_\infty = U_\infty \hat{\mathbf{x}}$, the differential operator can be written as

$$D_t^{\mathbf{u}_\infty} = \partial_t + U_\infty \partial_x,$$

and the linearized equation of the potential becomes

$$\varphi_{tt} + 2U_\infty \partial_{xt} \varphi + U_\infty^2 \varphi_{xx} - a_\infty^2 (\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = 0.$$

³ $D_{tt}^{\mathbf{u}_\infty} \varphi := D_t^{\mathbf{u}_\infty} (D_t^{\mathbf{u}_\infty} \varphi) = (\partial_t + \mathbf{u}_\infty \cdot \nabla)(\partial_t \varphi + \mathbf{u}_\infty \cdot \nabla \varphi) = \partial_{tt} \varphi + 2\mathbf{u}_\infty \cdot \partial_t \nabla \varphi + \mathbf{u}_\infty \cdot \nabla (\mathbf{u}_\infty \cdot \nabla \varphi)$.

18.1.2 Linearized steady potential equation - Prandtl-Glauert transformation

Steady equation becomes

$$(1 - M_\infty^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 .$$

This equation can be transformed into a Laplace equation (the same equation governing the potential for incompressible flows) with a transformation of coordinates

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \frac{x}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \\ \tilde{y} &= y \\ \tilde{z} &= z\end{aligned}$$

so that

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} ,$$

and

$$\varphi_{\tilde{x}\tilde{x}} + \varphi_{\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{\tilde{z}\tilde{z}} = 0 .$$

Details

With

$$\tilde{x} = \beta x ,$$

it follows

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \beta \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} , \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} ,\end{aligned}$$

so that

$$\begin{aligned}0 &= (1 - M_\infty^2) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = \\ &= (1 - M_\infty^2) \beta^2 \varphi_{\tilde{x}\tilde{x}} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = \\ &= \varphi_{\tilde{x}\tilde{x}} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} ,\end{aligned}$$

if $\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$.

Nature of the equation

Discussion with 2-dimensional equation first

- If the free-stream is **subsonic**, $M_\infty \in [0, 1)^4$, the differential equation is **elliptic**
- If the free-stream is **supersonic**, $M_\infty > 1$ (and no shock occurs? Or how to treat them? How strong can they be?) the differential equation is **hyperbolic**. *Method of characteristics...*

todo 3-dimensional equation

⁴ In order to get a subsonic flow in the whole domain, the free-stream velocity should be smaller than the speed of sound enough to avoid local supersonic regions in the flow.

18.1.3 Pressure coefficient

Pressure coefficient is defined as

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2}$$

Subsonic flow. Linearizing momentum equation for homoentropic flows,

$$h - h_\infty = \frac{U_\infty^2}{2} - \frac{(\mathbf{u}_\infty + \mathbf{u}') \cdot (\mathbf{u}_\infty + \mathbf{u}')}{2} \simeq -\mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{u}'.$$

Using $dh = Tds + \frac{dp}{\rho}$ for homoentropic flows, $ds = 0$, $dp = \rho dh$,

$$p' = p - p_\infty \simeq \rho_\infty (h' - h_\infty) = -\rho_\infty \mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{u}',$$

so that the linearized pressure coefficient reads

$$c_p = -\frac{2\mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{u}'}{U_\infty^2}.$$

With the assumption of $\mathbf{u}_\infty = U_\infty \hat{\mathbf{x}}$,

$$c_p = -\frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Now, the pressure coefficient for compressible flow can be compared with the pressure coefficient for incompressible flow c_p^{inc} in the same domain (e.g. with the same geometry of solid bodies).

$$\begin{aligned} c_p(x, y, z) &= -\frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x} = \tilde{\varphi}(\tilde{x}, y, z) = \varphi(x(\tilde{x}), y, z) \\ &= -\frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\varphi}(\tilde{x}, y, z)}{\partial \tilde{x}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, y, z), \end{aligned}$$

so that

$$c_p(x, y, z) = \frac{c_p^{inc}(\tilde{x}, y, z)}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}.$$

Quasi 1-dimensional flows.

1-dimensional flows. Non-ideal flows:

- friction dominated (Fanno)
- with heat transfer (Rayleigh)

n-dimensional flows.

- *Normal shocks*
- *Oblique shocks*
- *Prandtl-Meyer expansion fan* (2-dimensionnal, steady)

todo *Cylindrical symmetry?...*

19.1 Quasi-1-dimensional flows

Assumptions. Whenever no explicit assumption is made in this section, the following assumptions are made:

- uniform properties on each section of the stream tube
- negligible viscous and conductivity (non-ideal flows: friction-dominated (Fanno), with heat transfer (Rayleigh))
- negligible radial velocity component
- no azimuthal component
- *cylindrical symmetry of streamtube*

19.1.1 Steady flow

Integral balance equations.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho + \oint_{\partial v_t} \rho \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial v_t} \rho \mathbf{u} \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \int_{v_t} \rho \mathbf{g} + \oint_{\partial v_t} \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho e^t + \oint_{\partial v_t} \rho e^t \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \int_{v_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \oint_{\partial v_t} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{\partial v_t} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

For a control volume $v_t = V$ at rest, $\mathbf{u}_b = \mathbf{0}$ and $\mathbf{u}^{rel} = \mathbf{u}$. Neglecting the volume force $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, and integrating over an elementary control volume ΔV cutting a streamtube at coordinates $z, z + \Delta z$, under steady conditions

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \Delta V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ \oint_{\partial \Delta V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{\partial \Delta V} \mathbf{t}_n \\ \oint_{\partial \Delta V} \rho e^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{\partial \Delta V} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

Differential equations. Assuming uniform properties on each section,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (\rho u A) &= 0 \\ \frac{d}{dz} (\rho u^2 A + p A) - p A' &= 0 \\ \frac{d}{dz} \left[\rho \left(e^t + \frac{p}{\rho} \right) u A \right] &= 0. \end{aligned}$$

Thus, momentum equation can be recast as

$$0 = (\rho u^2 A)' + p' A.$$

Momentum equation

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \oint_{\partial \Delta V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \oint_{\partial \Delta V} \mathbf{t}_n = \\ &= \int_{A(z)} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + p \hat{\mathbf{n}} + \int_{A(z+\Delta z)} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + p \hat{\mathbf{n}} + \int_{\Delta A^{lat}} p \hat{\mathbf{n}}. \end{aligned}$$

For 2-dimensional flows,

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \int_{\Delta A^{lat}} p \hat{\mathbf{n}} = -\Delta z \int_{\ell^{lat}} p \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} \simeq -\Delta z p \frac{A'(z) \Delta z}{\Delta z} = -p(z) A'(z) \Delta z.$$

For 3-dimensional flows,...

Using mass equation, $(\rho u A)' = 0$, $\rho u A =: \dot{m}$, momentum and total energy equations become

$$\begin{aligned} \rho u A u' + p' A &= 0 \\ \rho u A h^{t'} &= 0, \end{aligned}$$

or, simplifying momentum equation for the area of the section of the stream-tube and total energy equation for a mass flux $\dot{m} \neq 0$,

$$\begin{aligned}\rho uu' + p' &= 0 \\ h^{t'} &= 0.\end{aligned}$$

Mach dependence

Subsonic and supersonic flows show different behavior. If the differential equations hold (no shock, homoentropic flow, $ds = 0$), pressure derivative is proportional to density derivative through the square of the speed of sound,

$$\begin{aligned}dp &= a^2(\rho, \bar{s})d\rho. \\ \frac{A'}{A} &= (M^2 - 1) \frac{u'}{u} \\ &= -\frac{M^2 - 1}{M^2} \frac{\rho'}{\rho}\end{aligned}$$

Details

Thus,

$$\begin{aligned}0 &= \rho uu' + a^2 \rho' && \text{(momentum)} \\ 0 &= \frac{\rho'}{\rho} + \frac{u'}{u} + \frac{A'}{A} && \text{(mass)} \\ &= -\frac{uu'}{a^2} + \frac{u'}{u} + \frac{A'}{A}\end{aligned}$$

and thus

- **velocity**

$$(M^2 - 1) \frac{u'}{u} = \frac{A'}{A}.$$

Thus,

- in a subsonic flow $M < 1$, velocity increases as the section of the stream-tube decreases
- in a supersonic flow $M > 1$, velocity increases as the section of the stream-tube increases

- **density**

$$\begin{aligned}\frac{\rho'}{\rho} &= -\frac{u^2}{a^2} \frac{u'}{u} \\ -\frac{M^2 - 1}{M^2} \frac{\rho'}{\rho} &= -\frac{A'}{A}\end{aligned}$$

Thus,

- in a subsonic flow $M < 1$, density decreases as the section of the stream-tube decreases
- in a supersonic flow $M > 1$, density decreases as the section of the stream-tube increases

- **pressure**

...

- **temperature**

...

19.1.2 Unsteady flow

todo For a generic control volume $v_t \dots$ It could be useful for mechanical/multi-field system dynamics...

Integral equations.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho + \oint_{\partial v_t} \rho \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial v_t} \rho \mathbf{u} \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \int_{v_t} \rho \mathbf{g} + \oint_{\partial v_t} \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho e^t + \oint_{\partial v_t} \rho e^t \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \int_{v_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \oint_{\partial v_t} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{\partial v_t} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

For a control volume $v_t = V$ at rest, $\mathbf{u}_b = \mathbf{0}$ and $\mathbf{u}^{rel} = \mathbf{u}$. Neglecting the volume force $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, and integrating over an elementary control volume ΔV cutting a streamtube at coordinates $z, z + \Delta z$, under steady conditions

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho + \oint_{\partial \Delta V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial \Delta V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{\partial \Delta V} \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho e^t + \oint_{\partial \Delta V} \rho e^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{\partial \Delta V} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

Differential equations. Assuming uniform properties on each section,

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho A) + \partial_z (\rho u A) &= 0 \\ \partial_t (\rho u A) + \partial_z [(\rho u^2 + p) A] - p \partial_z A &= 0 \\ \partial_t (\rho e^t A) + \partial_z \left[\rho \left(e^t + \frac{p}{\rho} \right) u A \right] &= 0. \end{aligned}$$

Assuming here rigid stream-tube with **known section** $A(z)$, **constant in time** $\partial_t A(z, t) = 0$, the differential equations can be recast as a set of PDE, with primary unknowns $(\rho A, m A, E^t A)$ whose

- conservative form reads

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho A \\ \rho u A \\ \rho e^t A \end{bmatrix} + \partial_z \begin{bmatrix} \rho u A \\ \frac{(\rho u A)^2}{\rho A} + p A \\ \frac{(\rho e^t A + p A)(\rho u A)}{\rho A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ p \partial_z A \\ 0 \end{bmatrix}$$

- conservative quasi-linear form reads

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho A \\ \rho u A \\ \rho e^t A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{(\rho u A)^2}{(\rho A)^2} + \partial_{\rho A}(p A) & \frac{2 \rho u A}{\rho A} + \partial_{\rho u A}(p A) & \partial_{\rho e^t A}(p A) \\ -\frac{(\rho h^t A)(\rho u A)}{(\rho A)^2} + \partial_{\rho A}(p A) \frac{\rho u A}{\rho A} & \frac{\rho h^t A}{\rho A} + \partial_{\rho u A}(\rho h^t A) \frac{\rho u A}{\rho A} & \frac{\rho u A}{\rho A} (1 + \partial_{\rho e^t}(p A)) \end{bmatrix} \partial_z \begin{bmatrix} \rho A \\ \rho u A \\ \rho e^t A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ p \partial_z A \\ 0 \end{bmatrix}$$

- convective form reads

$$\begin{cases} A \partial_t \rho + A(\rho \partial_z u + u \partial_z \rho) = -\rho u \partial_z A \\ \rho A \partial_t u + \rho A u \partial_z u + A \partial_z p = 0 \\ \rho A \partial_t e^t + \rho A u \partial_z e^t + A(u \partial_z p + p \partial_z u) = -p u \partial_z A. \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \rho \partial_z u + u \partial_z \rho = -\rho u \frac{\partial_z A}{A} \\ \partial_t u + u \partial_z u + \frac{\partial_z p}{\rho} = 0 \\ \partial_t e^t + u \partial_z e^t + \frac{u}{\rho} \partial_z p + \frac{p}{\rho} \partial_z u = -\frac{p u}{\rho} \frac{\partial_z A}{A}. \end{cases}$$

Internal energy equation

$$\begin{aligned}
 \partial_t e &= \partial_t e^t - \partial_t \frac{u^2}{2} = \\
 &= -u \partial_z e^t - \frac{u}{\rho} \partial_z p - \frac{p}{\rho} \partial_z u - \frac{pu}{\rho} \frac{\partial_z A}{A} + u \partial_z \frac{u^2}{2} + \frac{u}{\rho} \partial_z p = \\
 &= -u \partial_z e - \frac{p}{\rho} \partial_z u - \frac{pu}{\rho} \frac{\partial_z A}{A},
 \end{aligned}$$

i.e.

$$\partial_t e + u \partial_z e = -\frac{p}{\rho} \partial_z u - \frac{pu}{\rho} \frac{\partial_z A}{A}.$$

Entropy equation

$$\begin{aligned}
 TD_t s &= D_t e - \frac{p}{\rho^2} D_t \rho = \\
 &= -\frac{p}{\rho} \partial_z u - \frac{pu}{\rho} \frac{\partial_z A}{A} - \frac{p}{\rho^2} \left(-\rho \partial_z u - \rho u \frac{\partial_z A}{A} \right) = \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

or, as $T > 0$,

$$\begin{aligned}
 0 &= D_t s = \\
 &= \partial_t s + u \partial_z s.
 \end{aligned}$$

todo Discuss homoentropic flow, if no shock occurs

Characteristics

Quasi linear form with mass, momentum and entropy equation and (ρ, u, s) primary variables reads

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & \rho & \cdot \\ \frac{1}{\rho} (\partial_\rho p)_s & u & \frac{1}{\rho} (\partial_s p)_\rho \\ \cdot & \cdot & u \end{bmatrix} \partial_z \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho u \frac{\partial_z A}{A} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

The derivative $(\partial_\rho p)_s = a^2$ is the square of the speed of sound, as its meaning becomes clear in the spectrum of the convection matrix. These equations look like 1-dimensional Euler equations for compressible ideal flows, with the exception that a non-uniform section of the stream-tube acts as a source term in mass equation.

Spectrum - eigenvalues.

$$0 = |\mathbf{A}(\mathbf{u}) - s\mathbf{I}| = (u - s)^3 - (u - s)a^2,$$

i.e.

$$s_{1,3} = u \mp a, \quad s_2 = u.$$

Right eigenvectors.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \rho & \rho & \rho \\ -a & \cdot & a \\ \cdot & -\frac{\rho a^2}{(\partial_s p)_\rho} & \cdot \end{bmatrix}$$

Left eigenvectors.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\rho} & -\frac{1}{2a} & \frac{(\partial_s p)_\rho}{2\rho a^2} \\ \cdot & \cdot & -\frac{(\partial_s p)_\rho}{\rho a^2} \\ \frac{1}{2\rho} & \frac{1}{2a} & \frac{(\partial_s p)_\rho}{2\rho a^2} \end{bmatrix}$$

19.2 Non-ideal quasi-1 dimensional flows

Details

3-dimensional flows. Equations for a generic volume v_t ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho + \oint_{\partial v_t} \rho \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial v_t} \rho \mathbf{u} \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \int_{v_t} \rho \mathbf{g} + \oint_{\partial v_t} \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho e^t + \oint_{\partial v_t} \rho e^t \mathbf{u}^{rel} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \int_{v_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \oint_{\partial v_t} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{\partial v_t} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{v_t} \rho r \end{aligned}$$

For a volume V at rest, $\mathbf{u}^{rel} = \mathbf{u}$.

Quasi-1 dimensional approximation. Introducing the quasi-1 dimensional model, the contributions of heat conduction through lateral walls and heat source can be collected in one term,

$$- \int_{\partial \Delta S^{lat}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q} + \int_{\Delta V} \rho r = \rho r A \Delta z ,$$

while the conduction along the axis of the stream-tube reads

$$- \int_{\partial A(z)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q} - \int_{\partial A(z+\Delta z)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q} \simeq A(z)q(z) - A(z+\Delta z)q(z+\Delta z) = -\partial_z(qA)\Delta z + o(\Delta z) .$$

With a hydraulic approximation¹, the contribution of viscous stress in the momentum equation can be written as

$$\oint_{\partial v_t} \mathbf{s}_n = -\frac{f_d A}{2D_h} \rho \mathbf{u} |\mathbf{u}|$$

Quasi-1 dimensional model: differential equations. The conservative form of governing equations of compressible flows with friction and heat conduction reads

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_z \mathbf{F}(\mathbf{u}) + \partial_z \mathbf{F}^d(\mathbf{u}) = \mathbf{s} ,$$

or explicitly

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho A \\ \rho u A \\ \rho e^t A \end{bmatrix} + \partial_z \begin{bmatrix} \rho u A \\ \rho u^2 A + p A \\ \rho u h^t \end{bmatrix} + \partial_z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -q A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ p \partial_z A - \frac{f_d A}{2D_h} \rho u |u| \\ \rho r A \end{bmatrix} ,$$

¹ This is a high-Reynolds model, with viscous stress proportional to dynamic pressure through a friction coefficient and the ration of the area of the section and the hydraulic diameter, $\frac{A}{D_h}$. As a reference see chapter about *Similitude* and in particular the exericse and the discussion about *Moody's diagram*.

where the axial heat conduction is logically separated from the «convective» flux, as it's usually a **diffusive term** containing 2-nd order spatial derivative of primary variables, and changing the mathematical nature of the equations. As an example, using Fourier's law, $q = -k\partial_z T$, this term becomes

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_z(k\partial_z T) \end{bmatrix}.$$

If axial conduction is negligible if compared to convection and heat conduction through the walls of the streamtube, this contribution can be set to zero.

19.2.1 Fanno

With non-negligible friction...

todo

- analytical solution and diagrams for steady flows
- simulation for unsteady flows

19.2.2 Rayleigh

With non-negligible heat conduction through lateral walls...

todo

- analytical solution and diagrams for steady flows
- simulation for unsteady flows

19.3 Normal shocks

Jump conditions. A normal shock is a discontinuity in the physical quantities of the flow, with non-zero mass flux $\dot{m} \neq 0$ across it and zero tangential component of the velocity. *Jump conditions* across a normal shock are

$$\begin{aligned} 0 &= [\dot{m}] = [\rho u_n^{rel}] \\ \mathbf{u}_t &= \mathbf{0} \\ 0 &= \dot{m}[u_n] + [p] = \dot{m}[u_n^{rel}] + [p] \\ 0 &= \dot{m}[h^{t,rel}] = \dot{m}[h_n^{t,rel}] \end{aligned}$$

19.3.1 Perfect ideal gas

For perfect ideal gas, the ratio between quantities before and after normal shocks can be evaluated analytically.

Notation. Here $u_n^{rel} = u$ for brevity.

Jump conditions.

$$\begin{cases} \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \\ \rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 \\ \frac{u_1^2}{2} + h_1 = \frac{u_2^2}{2} + h_2 \end{cases}$$

Quantities as a function of Mach numbers M_1, M_2

Property
Pressure	$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}$...
Density	$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1^2}{M_2^2} \frac{1+\gamma M_2^2}{1+\gamma M_1^2} \dots$...
Temperature	$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2} \right)^2 \frac{M_2^2}{M_1^2}$...
Velocity	$\frac{u_2}{u_1} = \frac{M_2^2}{M_1^2} \frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}$...
Speed of sound	$\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$...
Entropy	$s_2 - s_1 = \frac{R}{\gamma-1} \ln \left\{ \left(\frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2} \right)^{1+\gamma} \left(\frac{M_2^2}{M_1^2} \right)^\gamma \right\}$...
Stagnation pressure	$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \dots$...
Other stag quantities

Details

Pressure. From momentum equation

$$p_2 = p_1 + \rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{\rho_1}{p_1} u_1^2 - \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_2}{p_2} u_2^2 = \left(a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \right)$$

$$= 1 + \gamma M_1^2 - \frac{p_2}{p_1} \gamma M_2^2,$$

and thus

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}.$$

Velocity. Starting from mass jump condition

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_1 p_2 p_1}{p_1 \rho_2 p_2} = \frac{a_2^2 p_1}{a_1^2 p_2} = \frac{u_2^2 M_1^2 p_1}{u_1^2 M_2^2 p_2}$$

and thus

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{M_2^2 p_2}{M_1^2 p_1} = \frac{M_2^2}{M_1^2} \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}.$$

Density. Using mass jump condition, and the relation for $\frac{u_2}{u_1}$,

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{M_1^2}{M_2^2} \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2}.$$

Speed of sound.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{u_2}{M_2} \frac{M_1}{u_1} = \frac{M_2}{M_1} \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}.$$

Temperature.

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} &= \frac{p_2}{R\rho_2} \frac{R\rho_1}{p_1} = \\ &= \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \cdot \frac{M_2^2}{M_1^2} \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} = \\ &= \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \frac{M_2^2}{M_1^2}. \end{aligned}$$

Entropy.

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= c_v \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) - c_p \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) = \\ &= \frac{R}{\gamma - 1} \left\{ \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) - \gamma \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \right\} = \\ &= \frac{R}{\gamma - 1} \ln \left\{ \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{-\gamma} \right\} = \\ &= \frac{R}{\gamma - 1} \ln \left\{ \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right) \left[\frac{M_1^2}{M_2^2} \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \right]^{-\gamma} \right\} = \\ &= \frac{R}{\gamma - 1} \ln \left\{ \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^{1+\gamma} \left(\frac{M_2^2}{M_1^2} \right)^\gamma \right\} \end{aligned}$$

Entropy determines a condition for feasible shocks, i.e. increasing entropy, $s_2 - s_1 \geq 0$.

Relation between Mach numbers M_1, M_2

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{\gamma-1}}{\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_1^2 - 1}$$

Details

todo *isn't there any cleaner way to derive the desired relation?*

Comparing the expression of the temperature ratio obtained above using equation of state and momentum equation, with the following expression obtained using energy equation

$$\begin{aligned} \frac{u_1^2}{2} + h_1 &= \frac{u_2^2}{2} + h_2 \\ \frac{u_1^2}{2} + c_p T_1 &= \frac{u_2^2}{2} + c_p T_2 \\ \frac{a_1^2 M_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} R T_1 &= \frac{a_2^2 M_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} R T_2 \quad (a^2 = \gamma R T) \\ T_1 \left(\frac{M_1^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \right) &= T_2 \left(\frac{M_2^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \right) \\ \rightarrow \frac{T_2}{T_1} &= \frac{\frac{M_1^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1}}{\frac{M_2^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1}} \end{aligned}$$

it follows

$$\left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \frac{M_2^2}{M_1^2} = \frac{\frac{M_1^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1}}{\frac{M_2^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1}}$$

...**todo** do all the required algebra, to solve the equation. Be smart and gather binomial $M_1^2 - M_2^2$ and simplify

Remarks.

- $M_2(M_1 = 1) = 1$
- the derivative reads

$$\begin{aligned} \frac{dM_2^2}{dM_1^2} &= \frac{\frac{2\gamma}{\gamma-1}M_1^2 - 1 - \frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(M_1^2 + \frac{2}{\gamma-1}\right)}{\left(\dots\right)^2} = \\ &= \frac{-1 - \frac{2}{\gamma-1}}{\left(\dots\right)^2} = \\ &= -\frac{\gamma+1}{\gamma-1} (2\gamma M_1^2 - (\gamma-1))^{-2} < 0, \end{aligned}$$

and thus if $M_1^2 > 1$, then $M_2^2 < 1$, and viceversa. **Entropy condition** $s_2 - s_1 \geq 0$ defines the feasible shocks: **for a PIG, feasible shocks have $M_1 > 1$ and $M_2 < 1$** , i.e. supersonic flow becomes subsonic after a normal shock.

- the function is singular for $M_1^2 = \frac{\gamma-1}{2\gamma}$. This condition only occurs for $M_1 < 1$, i.e. it never happens for physical shocks.

Entropy condition - PIG

$$\begin{aligned} \frac{\gamma-1}{R}(s_2 - s_1) &= \ln \left\{ \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^{1+\gamma} \left(\frac{M_2^2}{M_1^2} \right)^\gamma \right\} = \\ &= \ln \left\{ \left(\frac{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}{\gamma + 1} \right)^{\gamma+1} \left(\frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1} \right)^\gamma M_1^{-2\gamma} \right\} = \\ &= \ln \left\{ \frac{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}{(\gamma + 1)^{\gamma+1}} \frac{(2 + (\gamma-1)M_1^2)^\gamma}{M_1^{2\gamma}} \right\}, \end{aligned}$$

Remarks.

- For $M_1 = 1$, $x(M_1) = \{\dots\}$

$$\{\dots\}(M_1 = 1) = \frac{(\gamma+1)(\gamma+1)^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}} = 1,$$

and thus

$$s_2 - s_1 \propto \ln\{\dots\} = 0.$$

- the derivative w.r.t. M_1^2 reads

$$\begin{aligned} & \frac{(\gamma+1)^{\gamma+1}}{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1} \frac{2\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}} + \frac{M_1^{2\gamma}}{(2 + (\gamma-1)M_1^2)^\gamma} \left(\gamma(2 + (\gamma-1)M_1^2)^{\gamma-1} (\gamma-1)M_1^{-2\gamma} - (\dots)\gamma M_1^{2(\gamma-1)} \right) = \\ & = \frac{2\gamma}{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2 + (\gamma-1)M_1^2} - \frac{\gamma}{M_1^2} = \\ & = \dots \text{ (see below) } = \\ & = \frac{2\gamma(\gamma-1)(M_1^2 - 1)^2}{(2\gamma M_1^2 - \gamma + 1)(2 + (\gamma-1)M_1^2)M_1^2}. \end{aligned}$$

The derivative is **always non-negative** and thus **the entropy condition** $s_2 - s_1 \geq 0$ is satisfied only for $M_1 \geq 1$, i.e. for supersonic inflow becoming subsonic (see above) after a normal shock.

$$\begin{aligned} & 4\gamma M_1^2 + 2\gamma(\gamma-1)M_1^4 + \\ & \quad + \underbrace{2\gamma^2(\gamma-1)M_1^4}_1 - \underbrace{\gamma(\gamma-1)^2 M_1^2}_0 + \\ & \quad - 4\gamma^2 M_1^2 - \underbrace{2\gamma^2(\gamma-1)M_1^4}_1 + 2\gamma(\gamma-1) + \underbrace{\gamma(\gamma-1)^2 M_1^2}_0 = \\ & = 2\gamma(\gamma-1) - M_1^2 4\gamma(\gamma-1) + 2\gamma(\gamma-1)M_1^4 = \\ & = 2\gamma(\gamma-1)(M_1^2 - 1)^2. \end{aligned}$$

Quantities as a function of Mach numbers M_1

Property		
Entropy	$s_2 - s_1 = \frac{R}{\gamma-1} \ln \left\{ \frac{2\gamma M_1^{2-\gamma+1} (2+(\gamma-1)M_1^2)^\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1} M_1^{2\gamma}} \right\}$	≥ 0
Inflow Mach number	M_1	≥ 1
Outflow Mach number	$M_2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{\gamma-1}}{\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_1^2 - 1}$	≤ 1
Pressure	$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1)$	≥ 1
Density	$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left[1 - \frac{2}{\gamma+1} \frac{M_1^2 - 1}{M_1^2} \right]^{-1}$	≥ 1
Velocity	$\frac{u_2}{u_1} = 1 - \frac{2}{\gamma+1} \frac{M_1^2 - 1}{M_1^2}$	≤ 1
Speed of sound	$\left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 = \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right) \left(1 - \frac{2}{\gamma+1} \frac{M_1^2 - 1}{M_1^2} \right)$	≥ 1
Temperature	$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2$	≥ 1
Stagnation pressure	$\frac{p_{02}}{p_{01}} =$...
Other stag quantities		...

Details

Mach number M_2 can be recast as

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

Let's evaluate the ratio of functions of Mach numbers appearing in ratios of physical quantities

$$\begin{aligned} \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} &= \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}} = \\ &= \frac{(1 + \gamma M_1^2)(2\gamma M_1^2 - \gamma + 1)}{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1 + 2\gamma + \gamma(\gamma - 1)M_1^2} = \\ &= \frac{(1 + \gamma M_1^2)(2\gamma M_1^2 - \gamma + 1)}{\gamma M_1^2 + 1 + \gamma + \gamma^2 M_1^2} = \\ &= \frac{(1 + \gamma M_1^2)(2\gamma M_1^2 - \gamma + 1)}{(\gamma + 1)(1 + \gamma M_1^2)} = \\ &= \frac{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}{\gamma + 1} = \\ &= 1 + \frac{2\gamma(M_1^2 - 1)}{\gamma + 1}. \end{aligned}$$

Pressure.

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 - 1)$$

Velocity.

$$\begin{aligned} \frac{u_2}{u_1} &= \frac{M_2^2}{M_1^2} \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} = \\ &= \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2} = \\ &= \frac{2 + (\gamma + 1)M_1^2 - 2M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2} = \\ &= 1 - \frac{2}{\gamma + 1} \frac{M_1^2 - 1}{M_1^2}. \end{aligned}$$

Density.

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \left[1 - \frac{2}{\gamma + 1} \frac{M_1^2 - 1}{M_1^2} \right]^{-1}$$

Speed of sound.

$$\begin{aligned} \frac{a_2^2}{a_1^2} &= \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \\ &= \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 - 1) \right) \left(1 - \frac{2}{\gamma + 1} \frac{M_1^2 - 1}{M_1^2} \right) = \\ &= 1 + \frac{2}{(\gamma + 1)M_1^2} (\gamma M_1^2 - 1)(M_1^2 - 1) + \gamma \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^2 \left(\frac{M_1^2 - 1}{M_1} \right)^2 \end{aligned}$$

Temperature.

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{a_2^2}{a_1^2}$$

Entropy.

$$s_2 - s_1 = \ln \left\{ \frac{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}{(\gamma + 1)^{\gamma+1}} \frac{(2 + (\gamma - 1)M_1^2)^\gamma}{M_1^{2\gamma}} \right\}$$

19.4 Oblique shocks

Jump conditions

19.4.1 Normal Component Analysis

The oblique shock is treated as a normal shock acting only on the normal component of the Mach number:

- $M_{n1} = M_1 \sin \beta$
- $M_{n2} = M_2 \sin(\beta - \theta)$

The tangential component of velocity remains preserved: $u_{t1} = u_{t2}$.

19.4.2 The θ - β - M Relation

By relating the geometry of the velocity vectors ($\tan \beta = \frac{u_{n1}}{u_t}$ and $\tan(\beta - \theta) = \frac{u_{n2}}{u_t}$) and substituting the density ratio ρ_2/ρ_1 , we arrive at the « θ - β - M equation»:

$$\tan \theta = 2 \cot \beta \left[\frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right]$$

19.4.3 Observations from the θ - β - M function

1. **Two Solutions:** For any given M_1 and $\theta < \theta_{max}$, there are two possible shock angles β :
 - **Weak Shock:** Smaller β , usually results in $M_2 > 1$. This is the one typically observed in open flow.
 - **Strong Shock:** Larger β , results in $M_2 < 1$. Usually occurs in confined flows or high back-pressure.
2. **Maximum Deflection:** If θ exceeds θ_{max} for a given M_1 , no straight oblique shock solution exists, and the shock becomes **detached** (bow shock).

Property	Ratio	Trend ($M_1 > 1$)
Pressure	$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_{n1}^2 - 1)$	Increase
Density	$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_{n1}^2}{(\gamma-1)M_{n1}^2+2}$	Increase
Temperature	$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2}$	Increase
Stagnation Pressure	$\frac{p_{02}}{p_{01}} = e^{-\Delta s/R}$	Decrease

19.5 Expansion fans - Prandtl-Meyer relation

A Prandtl-Meyer expansion fan is a continuous centering of Mach waves that occurs when a **supersonic flow** is turned «away» from itself, such as around a convex corner. The flow is homoentropic, and the flow properties (density, pressure, temperature, velocity, ...) vary smoothly across the fan while the Mach number increases. The fan connects two regions of the domain with uniform properties.

todo

- *Figure*
 - *Script with Euler solver in 2-dimensional domains. To be written, so far only 1-d solver on GDrive*
-

Under the assumptions of:

1. ideal flow - negligible viscosity and heat conduction
2. no shocks, so that the differential equation holds in the whole domain
3. uniform entropy and zero vorticity at the inflow of the domain

the flow in the whole domain is **homoentropic**, $s(\mathbf{r}, t) = \bar{s}$, and **irrotational**, $\omega(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$.

Under the additional assumption of steady flow and uniform conditions at inflow, the flow is **homo-total-enthalpic**, i.e. $h^t(\mathbf{r}) = \bar{h}^t$.

Entropy

Under the assumptions:

1. ideal flow - negligible viscosity and heat conduction
2. no shock

the *differential entropy equation* becomes

$$D_t s = 0 ,$$

and it governs the evolution of the entropy in the whole domain (as it holds in the whole domain in absence of shocks). Thus, the entropy of any material particle is constant in time. If all the material particles entering the domain have the same entropy, it immediately follows that the entropy is uniform in the whole domain,

$$s(\mathbf{r}, t) = \bar{s} .$$

Vorticity

Under ideal flow assumptions - negligible viscosity and heat conduction - *vorticity dynamical equation* reads

$$D_t \omega = \omega \cdot \nabla \mathbf{u} - \omega \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p$$

Using mass equation, $D_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, and thus $-\nabla \cdot \mathbf{u} = D_t \rho$. Expressing the pressure field as a function of density and entropy as thermodynamic independent variables, $p(\rho, s)$, its gradient becomes

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \nabla \rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \nabla s .$$

Under the assumptions of homentropic flow, $s(\mathbf{r}, t) = \bar{s}$, it follows that $\nabla s = \mathbf{0}$ and $\nabla p = a^2(\rho, \bar{s})\nabla\rho$. Under these assumptions, the term $\nabla\rho \times \nabla p$ is identically zero.

The vorticity equation becomes (after multiplying by $\frac{1}{\rho}$, $\rho \neq 0$),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}D_t\omega &= \frac{1}{\rho}\omega \cdot \nabla\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\omega\nabla \cdot \mathbf{u} \\ \frac{1}{\rho}D_t\omega &= \frac{1}{\rho}\omega \cdot \nabla\mathbf{u} + \frac{1}{\rho^2}\omega D_t\rho \\ \frac{1}{\rho}D_t\omega - \frac{1}{\rho^2}\omega D_t\rho &= \frac{1}{\rho}\omega \cdot \nabla\mathbf{u} \\ D_t\left(\frac{\omega}{\rho}\right) &= \frac{\omega}{\rho} \cdot \nabla\mathbf{u} \end{aligned}$$

This equation is formally the same as the vorticity equation for incompressible flow with uniform density: here the vector field $\frac{\omega}{\rho}$

- evolves as a material vector
- if it's zero at a point in space and time, it remains equal to zero along the trajectory of the material particle
- if it's zero at a set of points where material points enter the domain (inflow), it's equal to zero on all the trajectories originating from those points. If every trajectory in the domain originates in a irrotational region of the flow, and there's no shock in the domain so that the differential equation holds, the flow is irrotational in the whole domain.

Total enthalpy - steady flow

The differential form of total energy equation reads

$$\rho\partial_t e^t + \rho\mathbf{u} \cdot \nabla e^t = \rho\mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q},$$

with the stress tensor of a Newtonian fluid $\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{S}$, and the viscous stress tensor $\mathbb{S} = 2\mu\mathbb{D} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbb{I}$. For an ideal flow, $\mathbb{S} = \mathbf{0}$, $\mathbf{q} = \mathbf{0}$. If volume force is negligible, $\mathbf{g} = \mathbf{0}$. Under these assumptions,

$$\begin{aligned} \rho\partial_t e^t + \rho\mathbf{u} \cdot \nabla e^t &= -\nabla \cdot (p\mathbf{u}) = \\ &= -\mathbf{u} \cdot \nabla p - p\nabla \cdot \mathbf{u} = \\ &= -\rho\mathbf{u} \cdot \frac{\nabla p}{\rho} - \frac{p}{\rho}(-\partial_t\rho - \mathbf{u} \cdot \nabla\rho) = \\ &= \frac{p}{\rho}\partial_t\rho - \rho\mathbf{u} \cdot \left[\frac{\nabla p}{\rho} - \frac{p}{\rho^2}\nabla\rho \right] = \\ &= \frac{p}{\rho}\partial_t\rho - \rho\mathbf{u} \cdot \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right), \end{aligned}$$

or

$$-\rho \left[\partial_t e^t - \frac{p}{\rho^2} \partial_t \rho \right] = \rho\mathbf{u} \cdot \nabla h^t,$$

with the total enthalpy $h^t = e^t + \frac{p}{\rho}$. Under steady conditons, $\partial_t \equiv 0$, it follows that

$$\rho\mathbf{u} \cdot \nabla h^t = 0,$$

i.e. the total enthalpy is constant on every trajectory. If the physical quantities are uniform at the inflow, total enthalpy is uniform in the whole domain, and not only on every individual trajectory, i.e. the flow is **homo-total-enthalpic**.

Under these assumptions, the governing equations of the flow are the homoentropic Euler equations, i.e. in convective form using ρ, \mathbf{u} as the dynamical variables

$$\begin{aligned} D_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \rho D_t \mathbf{u} + a^2(\rho, \bar{s}) \nabla \rho &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

with the constraint $s(\mathbf{r}, t) = \bar{s}$, and a constitutive equation to write the speed of sound as a function of the independent thermodynamic variables. As the entropy is uniform, it can be treated as a parameter, so that there's need for only one independent thermodynamic variable, here ρ . All the other thermodynamic variables can be evaluated a posteriori, once the density field is known as $f(\mathbf{r}, t) = f(\rho(\mathbf{r}, t), \bar{s})$, with the notational abuse of using f for the same physical quantity, but for functions with different arguments.

Example 19.5.1 (Speed of sound - Perfect ideal gas)

For a perfect ideal gas,

$$\frac{p}{\rho} = RT,$$

and the internal energy is a function of the temperature T only

$$e = c_v T,$$

with a constant heat capacity at constant volume c_v . Using the first principle of thermodynamics

$$de = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho,$$

it follows, from Meyer relation and the definition of heat coefficient ratio γ listed below,

$$\begin{aligned} dp &= d\rho RT + \rho R dT = \\ &= d\rho RT + \rho R \frac{1}{c_v} de = \\ &= d\rho RT + \rho R \frac{1}{c_v} \left[T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho \right] = \\ &= \frac{R}{c_v} \rho T ds + \left[1 + \frac{R}{c_v} \right] RT d\rho = \\ &= \frac{R}{c_v} \rho T ds + [1 + \gamma - 1] RT d\rho = \\ &= \frac{R}{c_v} \rho T ds + \gamma RT d\rho, \end{aligned}$$

so that the speed of sound is

$$a^2(\rho, s) = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \gamma RT(\rho, s) = \gamma R \rho^{\gamma-1} e^{\frac{s}{c_v}} \frac{T_0}{\rho_0^{\gamma-1}} e^{-\frac{s_0}{c_v}},$$

having used the relations derived below for a perfect ideal gas.

Meyer relation and heat coefficient ratio used above are

$$\begin{aligned} c_p &= c_v + R \quad (\text{Meyer relation}) \\ \gamma &= \frac{c_p}{c_v} \quad (\text{Heat coefficient ratio}), \end{aligned}$$

so that

$$\begin{aligned} \frac{c_v}{R} &= \frac{1}{\gamma - 1} \\ \frac{c_p}{R} &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \end{aligned}$$

Dividing the expression of the differential of pressure $dp(s, \rho)$ by p , and using the equation of state of ideal gas with constant heat coefficients,

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{c_v} ds + \gamma \frac{d\rho}{\rho},$$

and after integration w.r.t. a reference state 0

$$\begin{aligned} \ln \frac{p}{p_0} &= \frac{1}{c_v} (s - s_0) + \gamma \ln \frac{\rho}{\rho_0} \\ \ln \left\{ \left(\frac{p}{p_0} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\gamma} \right\} &= \frac{s - s_0}{c_v} \\ \frac{p\rho^{-\gamma}}{p_0\rho_0^{-\gamma}} &= e^{\frac{s-s_0}{c_v}} \end{aligned}$$

or with $p = \rho RT$

$$\begin{aligned} \frac{T\rho^{1-\gamma}}{T_0\rho_0^{1-\gamma}} &= e^{\frac{s-s_0}{c_v}} \\ \frac{T}{T_0} &= \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} e^{\frac{s-s_0}{c_v}} \\ T(\rho, s) &= \rho^{\gamma-1} e^{\frac{s}{c_v}} \frac{T_0}{\rho_0^{\gamma-1}} e^{-\frac{s_0}{c_v}} \end{aligned}$$

19.5.1 Characteristic lines and compatibility equations

- [Link to Method of characteristics: Homoentropic inviscid compressible flows - 2d](#)

A steady expansion fan at a sharp corner connects two regions of the domain with supersonic flow and homogeneous characteristics. Let 1 be the inflow homogeneous region and 2 the outflow homogeneous region.

In a 2-dimensional domain there are three families of characteristic lines. Characteristic lines (or surfaces in 3-dimensional problems) are defined as those lines orthogonal to the directions $\hat{\mathbf{n}}_i$ that makes the eigenvalue s_i of the matrix $\mathbf{A}_{\mathbf{n}}$ equal to zero. The eigenvalues of the matrix $\mathbf{A}_{\mathbf{n}}$ are

$$\begin{aligned} s_{1,3} &= \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \mp a \\ s_2 &= \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{1,3} &= \pm \frac{1}{M} \\ \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{1,3} &= 0. \end{aligned}$$

On characteristic lines the following compatibility equations hold

$$\begin{aligned} \ell_{1,3} : 0 &= \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M^2} \frac{\partial_\tau \rho}{\rho} \mp \partial_\tau \theta \\ \ell_2 : 0 &= \frac{1}{\rho} \partial_\tau p + \partial_\tau \frac{V^2}{2}, \end{aligned}$$

being $V = |\mathbf{u}|$. Some characteristic lines of family 1 and 2 start from inflow homogeneous region and reach outflow homogeneous region. The compatibility equation on characteristic lines of family 2 is nothing but the directional derivative of the total enthalpy along streamlines, and thus it's identically satisfied.

dh

The differential of enthalpy $h(p(\rho, s), s)$ reads

$$\begin{aligned} dh &= Tds + \frac{dp}{\rho} = Tds + \frac{1}{\rho} [(\partial_\rho p)_s d\rho + (\partial_s p)_\rho ds] = \\ &= \frac{a^2}{\rho} d\rho + \left(T + \frac{1}{\rho} (\partial_s p)_\rho \right) ds, \end{aligned}$$

and for homoentropic flows becomes

$$dh = \frac{dp}{\rho} = \frac{a^2}{\rho} d\rho,$$

with $a^2(\rho, s) = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s(\rho, s)$ the square of the local speed of sound.

Total enthalpy on streamlines, or ℓ_2 characteristic lines

If $h^t(\mathbf{r}) = \bar{h}^t$ uniform, then

$$\mathbf{0} = \nabla h^t = \nabla h + V \nabla V = (\partial_\rho h)_s \nabla \rho + (\partial_s h)_\rho \nabla s + V \nabla V,$$

and for homoentropic flows, $\nabla s = 0$,

$$\mathbf{0} = \nabla h^t = \frac{\nabla p}{\rho} + V \nabla V = \frac{a^2}{\rho} \nabla \rho + \nabla \frac{V^2}{2}.$$

As the relation $\Delta h^t = 0$ holds, the compatibility equations on characteristic lines ℓ_2 is identically satisfied, being the directional derivative of h^t along the local direction of the velocity field, $\partial_{\mathbf{u}} h^t = \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla h^t \equiv 0$.

19.5.2 Relation between Mach number and flow deflection

First the relation between $d\rho$ and dM is evaluated in the whole domain of the homo-total-entropic flow

$$\begin{aligned} 0 &= dh^t = dh + VdV = \\ &= \frac{dp}{\rho} + Mad(Ma) = \\ &= a^2 \frac{d\rho}{\rho} + Ma^2 dM + M^2 ada = \\ &= a^2 \frac{d\rho}{\rho} + Ma^2 dM + \frac{1}{2} M^2 da^2 = \\ &= a^2 \frac{d\rho}{\rho} + Ma^2 dM + \frac{1}{2} M^2 \left(\frac{\partial a^2}{\partial \rho} \right)_s d\rho, \end{aligned}$$

i.e.

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{M^2}{1 + \frac{1}{2} M^2 \frac{\rho}{a^2} \left(\frac{\partial a^2}{\partial \rho} \right)_s} \frac{dM}{M},$$

and then this relation is inserted in the compatibility equation on ℓ_1 - connecting the two uniform regions - in terms of $d\rho$, $d\theta$ to get

$$\partial_{\tau_1} \theta = - \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{1}{2} M^2 \frac{\rho}{a^2} \left(\frac{\partial a^2}{\partial \rho} \right)_s} \frac{\partial_{\tau_1} M}{M}.$$

Details

$$\begin{aligned}
 \partial_{\tau_1} \theta &= \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M^2} \frac{\partial_{\tau_1} \rho}{\rho} = \\
 &= -\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M^2} \frac{M^2}{1 + \frac{1}{2} M^2 \frac{\rho}{a^2} \left(\frac{\partial a^2}{\partial \rho} \right)_s} \frac{\partial_{\tau_1} M}{M} = \\
 &= -\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{1}{2} M^2 \frac{\rho}{a^2} \left(\frac{\partial a^2}{\partial \rho} \right)_s} \frac{\partial_{\tau_1} M}{M}.
 \end{aligned}$$

Example 19.5.2 (Perfect Ideal Gas)

Equation of state of perfect ideal gas... in a homoentropic flow, $p\rho^{-\gamma} = p_0\rho_0^{-\gamma}$,

$$\left(\frac{\partial a^2}{\partial \rho} \right)_s = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial^2 \rho} \right)_s = \gamma(\gamma - 1)p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \rho^{-2} = \gamma(\gamma - 1)p\rho^{-2}$$

so that the denominator reads

$$1 + \frac{M^2}{2} \frac{\rho}{\gamma \frac{p}{\rho}} \gamma(\gamma - 1) \frac{p}{\rho^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2,$$

and the relation between flow deflection and Mach number becomes

$$\partial_{\tau_1} \theta = -\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{\partial_{\tau_1} M}{M}.$$

Riemann problem is time-dependent problem, starting from a piecewise-uniform initial condition.

P-sys

Euler equations

20.1 P-system

Riemann problem in the P-sys. 1-dimensional P-sys is a **two**-variable hyperbolic system. Riemann problem for the P-sys aims at finding the **two** waves (either shock or expansion waves), connecting the uniform regions with conservative variables \mathbf{u}_L , \mathbf{u}_R on the left and the right of the discontinuity respectively, through **one** intermediate state \mathbf{u}_1 to be determined as a part of the solution of the Riemann problem.

Depending on the value of the intermediate state \mathbf{u}_1 ,

- the **left wave** is
 - a rarefaction wave if $u_L < u_1$
 - a shock wave if $u_L > u_1$
- the **right wave** is
 - a rarefaction wave if $u_1 < u_R$
 - a shock wave if $u_1 > u_R$

For two states connected by a shock wave, Rankine-Hugoniot relation holds

$$(u_B - u_A)_{1,2} = \mp \frac{a}{\left(\sqrt{\frac{\rho_B}{\rho_A}} - \sqrt{\frac{\rho_A}{\rho_B}}\right)}.$$

For two states connected by an expansion wave, the following relation holds

$$(u_B - u_A)_{1,2} = \mp a \ln \frac{\rho_B}{\rho_A}.$$

Entropy condition? ...

Differential equations. In conservative form

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho \\ m \end{bmatrix} + \partial_x \begin{bmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} + a^2 \rho \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

with constant speed of sound a . Convective form reads

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - \frac{m^2}{\rho^2} & 2\frac{m}{\rho} \end{bmatrix} \partial_x \begin{bmatrix} \rho \\ m \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Spectral decomposition - Characteristics

Eigenvalues.

$$0 = |\mathbf{A} - s\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -s & 1 \\ a^2 - u^2 & -s + 2u \end{vmatrix} = s(s - 2u) + u^2 - a^2$$

$$s_{1,2} = u \mp a$$

Right eigenvectors.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \rho & \rho \\ \rho(u - a) & \rho(u + a) \end{bmatrix}$$

Left eigenvectors.

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2\rho^2 a} \begin{bmatrix} \rho(u + a) & -\rho \\ -\rho(u - a) & \rho \end{bmatrix}$$

Spectral decomposition.

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{L}.$$

Characteristic lines and Riemann invariants. Let \mathbf{v} the characteristic variables defined by the condition $d\mathbf{v} = \mathbf{L}d\mathbf{u}$, the PDE

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = \\ &= \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{L} \partial_x \mathbf{u}, \end{aligned}$$

after multiplying by \mathbf{L} on the left, becomes the diagonal system of equation

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{\Lambda} \partial_x \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Let $\mathbf{V}(t) = \mathbf{v}(X(t), t)$ the value of the characteristic variables on the line $X(t)$. Exploiting the derivation of composite functions,

$$d_t \mathbf{U}(t) = \partial_t \mathbf{u}(X(t), t) + \dot{X}(t) \partial_x \mathbf{u}(X(t), t),$$

and inserting in the PDE,

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t v_i + s_i \partial_x v_i = \\ &= d_t V_i + (s_i - \dot{X}) \partial_x v_i. \end{aligned}$$

Characteristic lines are defined by the condition $\dot{X}_i(t) = s_i(\mathbf{U}(t))$, and on these lines $d_t V_i = 0$, i.e. the i^{th} characteristic variable is constant on the characteristic lines of the i^{th} family. For a P-sys, characteristic lines of family 1, 2 satisfy

$$\begin{cases} \dot{X}_{1,2}(t) = a - u(X_{1,2}(t), t) \\ 0 = \dot{V}_{1,2} = \frac{1}{2R^2a} [R(a \pm U)\dot{R} \mp RM] = \frac{1}{2} \left[\frac{\dot{R}}{R} \mp \frac{\dot{U}}{a} \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\ln \left(\frac{R}{\rho_0} \right) \mp \frac{U}{a} \right] \end{cases}$$

with $\dot{m} = \dot{\rho}u + \rho\dot{u}$

Integral equations. On a control volume V at rest

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho + \oint_{\partial V} \mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{m} + \oint_{\partial V} \left[\frac{\mathbf{m}\mathbf{m}}{\rho} + a^2 \rho \mathbb{I} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

and for an arbitrary volume v_t

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho + \oint_{\partial v_t} \rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}_b) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial v_t} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_b) \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial v_t} \rho a^2 \hat{\mathbf{n}} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Jump conditions.

$$\begin{cases} 0 = [\rho u^{rel}] \\ 0 = [\rho u u^{rel} + \rho a^2] \end{cases}$$

Shocks

The speed of the shock can be written as a function of the physical quantities on its sides, with n different expressions, one per component of the relation

$$\dot{s}[\mathbf{u}] = [\mathbf{F}(\mathbf{u})],$$

here for the P-sys

$$\begin{cases} \rho_1(u_1 - \dot{s}) = \rho_2(u_2 - \dot{s}) \\ \rho_1(u_1 - \dot{s})u_1 + \rho_1 a^2 = \rho_2(u_2 - \dot{s})u_2 + \rho_2 a^2 \end{cases}$$

and thus

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{\rho_2 u_2 - \rho_1 u_1}{\rho_2 - \rho_1} = \\ &= \frac{\rho_2(u_2^2 + a^2) - \rho_1(u_1^2 + a^2)}{\rho_2 u_2 - \rho_1 u_1}. \end{aligned}$$

Comparing the two expressions of the speed of the shock, a relation between physical quantities on the sides of the shock appears

$$\begin{aligned} 0 &= (\rho_2 u_2 - \rho_1 u_1)^2 - (\rho_2 - \rho_1)(\rho_2(u_2^2 + a^2) - \rho_1(u_1^2 + a^2)) = \\ &= \rho_2^2 u_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 u_1 u_2 + \rho_1^2 u_1^2 - \rho_2^2(u_2^2 + a^2) - \rho_1^2(u_1^2 + a^2) + \rho_1 \rho_2(u_2^2 + 2a^2 + u_1^2) = \\ &= -2\rho_1 \rho_2 u_1 u_2 - \rho_2^2 a^2 - \rho_1^2 a^2 + \rho_1 \rho_2(u_2^2 + 2a^2 + u_1^2) = \\ &= \rho_1 \rho_2 (u_1 - u_2)^2 - a^2 (\rho_2 - \rho_1)^2, \end{aligned}$$

and thus the **Rankine-Hugoniot** relation follows

$$(u_2 - u_1)_{1,2} = \mp \frac{a}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} (\rho_2 - \rho_1) .$$

The speed of the shock is

$$\begin{aligned} \dot{s}_{1,2} &= \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \left[\rho_2 \left(u_1 \mp \frac{a}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} (\rho_2 - \rho_1) \right) - \rho_1 u_1 \right] = \\ &= \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \left[(\rho_2 - \rho_1) u_1 \mp \rho_2 \frac{a}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} (\rho_2 - \rho_1) \right] = \\ &= u_1 \mp a \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \\ \dot{s}_{1,2} &= \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \left[\rho_2 u_2 - \rho_1 \left(u_2 \pm \frac{a}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} (\rho_2 - \rho_1) \right) \right] = \\ &= u_2 \mp a \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \end{aligned}$$

Self-similar solutions at a discontinuity in the initial state.

Self-similar solution - expansion fan

With the similarity variable

$$\xi = \frac{x}{t} ,$$

and the function $\mathbf{U}(\xi) = \mathbf{u}(x, t)$,

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} &= \partial_t \xi \mathbf{U}' = -\frac{x}{t^2} \mathbf{U}'(\xi) \\ \partial_x \mathbf{u} &= \partial_x \xi \mathbf{U}' = \frac{1}{t} \mathbf{U}'(\xi) \end{aligned}$$

so that the equation becomes

$$\mathbf{0} = -\xi \mathbf{U}' + \mathbf{A} \mathbf{U}' = [-\xi \mathbf{I} + \mathbf{A}] \mathbf{U}'(\xi) .$$

This is an eigenvalue problem, as the trivial solution $\mathbf{U}'(\xi) = \mathbf{0}$ can't produce a smooth function between two discontinuous states. The solution of the eigenvalue problem reads

$$\xi_{1,2} = U(\xi) \mp a ,$$

with right eigenvectors

$$\mathbf{r}_{1,2} = \begin{bmatrix} \rho(\xi) \\ \rho(\xi)(u(\xi) \mp a) \end{bmatrix} ,$$

These conditions define two families of expansion fans, one originating from the first family of characteristic and one originating from the second family.

The derivative of the conservative variable w.r.t. ξ must be proportional to the right eigenvectors

$$\mathbf{U}'_{1,2}(\xi) = \begin{bmatrix} \rho'_{1,2} \\ m'_{1,2} \end{bmatrix} = C_{1,2} \begin{bmatrix} \rho \\ m \mp \rho a \end{bmatrix} ,$$

or

$$\begin{cases} \rho' = C\rho \\ m' = C(m \mp \rho a) \end{cases}$$

Integration gives

$$\rho_{1,2}(\xi) = \rho_A e^{C(\xi - \xi_A)}$$

and

$$m' = Cm \mp C\rho_A a e^{C(\xi - \xi_A)}$$

The solution reads (see below for a very short review of the solution of this kind of ODE)

$$\begin{aligned} m_{1,2}(\xi) &= m_A e^{C\xi} \mp C\rho_A a \xi e^{C(\xi - \xi_A)} = \\ &= m_A e^{C(\xi - \xi_A)} \mp C(\xi - \xi_A) a \rho_{1,2}(\xi) \end{aligned}$$

Let $m(\xi) = \rho(\xi)u(\xi)$, then the velocity field is

$$u_{1,2}(\xi) = u_A \mp C(\xi - \xi_A) a .$$

This expression can be recast as a function of u and ρ , as $C(\xi - \xi_A) = \ln \frac{\rho_{1,2}}{\rho_A}$, as

$$u_{1,2}(\xi) = u_a \mp a \ln \frac{\rho_{1,2}}{\rho_A} .$$

Solution of the 1-st order linear non-homogeneous ODE

$$y'(x) = Cy(x) + Ae^{Cx}$$

The solution of the homogeneous

$$y_o(x) = ae^{Cx} ,$$

is proportional to the forcing. The particular solution of the non-homogeneous equation has the form

$$y_p(x) = bxe^{Cx} ,$$

so that its derivative is

$$y_p'(x) = be^{Cx} + bCxe^{Cx} .$$

Substitution in the ODE gives

$$be^{Cx} + bCxe^{Cx} = C(bxe^{Cx}) + Ae^{Cx}$$

and thus $b = A$. The solution of the non-homogeneous equation thus reads

$$y(x) = ae^{Cx} + Axe^{Cx} ,$$

with the integration constant a that is determined by a condition (initial, final, or whatever).

20.2 Euler equations

21.1 Unsteady

Euler equations

$$\begin{aligned} 0 &= D_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{0} &= \rho D_t \mathbf{u} + \nabla p \\ 0 &= \rho D_t e + \nabla \cdot (p \mathbf{u}) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{0} &= \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p \\ 0 &= \partial_t e + \mathbf{u} \cdot \nabla e + \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} . \end{aligned}$$

with $p(\rho, e)$. In Cartesian coordinates

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \partial_t \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & \rho & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_e & u & \cdot & \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial e} \right)_\rho \\ \cdot & \cdot & u & \cdot \\ \cdot & \frac{p}{\rho} & \cdot & u \end{bmatrix} \partial_x \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v & \cdot & \rho & \cdot \\ \cdot & v & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_e & \cdot & v & \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial e} \right)_\rho \\ \cdot & \cdot & \frac{p}{\rho} & v \end{bmatrix} \partial_y \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

and looking for curves $\mathbf{R}(t)$, s.t. the equations become ODEs, for the function $\mathbf{U}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{R}(s(t)), t)$. Since

$$d_t \mathbf{U} = \partial_t \mathbf{u} + \frac{d\mathbf{R}}{ds} \frac{ds}{dt} \cdot \nabla \mathbf{u} = \partial_t \mathbf{u} + X'(s) \dot{s} \partial_x \mathbf{u} + Y'(s) \dot{s} \partial_y \mathbf{u} ,$$

todo *Uncomment. Fix and continue*

21.2 Steady

$$0 = \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p$$

$$0 = \mathbf{u} \cdot \nabla e + \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

with $p(\rho, e)$. In Cartesian coordinates

$$\begin{bmatrix} u & \rho & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_e & u & \cdot & \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial e} \right)_\rho \\ \cdot & \cdot & u & \cdot \\ \cdot & \frac{p}{\rho} & \cdot & u \end{bmatrix} \partial_x \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v & \cdot & \rho & \cdot \\ \cdot & v & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_e & \cdot & v & \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial e} \right)_\rho \\ \cdot & \cdot & \frac{p}{\rho} & v \end{bmatrix} \partial_y \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

todo Jump conditions hold in non-steady conditions as well

22.1 Shock waves

...

22.1.1 Normal

...

22.1.2 Oblique

...

22.2 Rarefaction fans

Assuming negligible viscosity and conductivity, Navier-Stokes equations for compressible fluids become Euler equations¹

The conservative form of Navier-Stokes equations

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbb{T} \\ \partial_t (\rho e^t) + \nabla \cdot (\rho e^t \mathbf{u}) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \end{cases}$$

need

- boundary conditions
- **constitutive laws** for relating stress tensor \mathbb{T} and conductive heat flux \mathbf{q} to *dynamic variables* ρ , $\mathbf{m} := \rho \mathbf{u}$, $E^t := \rho e^t$. As a common example, stress tensor for *Newtonian fluids* is the sum of pressure and viscosity stress, and this latter contribution is linear and isotropic w.r.t. first order spatial derivatives of the velocity field²,

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{S} = -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbb{I},$$

being p the pressure field, $\mathbb{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}]$ the deformation velocity tensor and μ , λ the viscosity coefficients. *Fourier's law* provides a linear isotropic relation between the conductive heat flux and the temperature gradient

$$\mathbf{q} = -k\nabla T.$$

- **state equations**, for relating thermodynamic variables appearing in constitutive laws with *dynamic variables*. Using constitutive laws for Newtonian fluids and Fourier's law, there's a need for state equations relating pressure, temperature and - if not possible to model as constant - viscosity coefficients and heat conductivity,

$$p = p(\rho, \mathbf{m}, E_t)$$

$$T = T(\rho, \mathbf{m}, E_t)$$

...

¹ NS equations are second-order in space due to the diffusive contributions of viscous stress $\nabla \cdot \mathbb{T} = \nabla \cdot [2\mu\nabla^s \mathbf{u} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbb{I}]$ for Newtonian fluids in momentum equation and heat conduction flux $-\nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla \cdot (k\nabla T)$ with Fourier law in total energy equation. Boundary conditions needed for the mathematical problem change as well: while NS equations require no-slip boundary conditions apply on solid bodies, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_b$, Euler equations need only no-penetration boundary conditions $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{u}_b \cdot \hat{\mathbf{n}}$.

² **todo** discuss isotropic tensors, or link to *Math:Vector and Tensor Algebra and Calculus:Isotropic Tensors*

Usually internal energy is used in state equations. Mass density of total energy is defined as the sum of internal energy and kinetic energy

$$e^t = e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}.$$

Introducing the constitutive laws and the state equations in Navier-Stokes equations and collecting terms with 1-st order and 2-nd order space derivatives,

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p \mathbb{I}) = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbb{S} \\ \partial_t (\rho e^t) + \nabla \cdot (\rho e^t \mathbf{u} + p \mathbf{u}) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbb{S} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \end{cases}$$

Euler equations immediately follow by setting equal to zero the contribution of viscosity and heat conduction, i.e. the terms collecting the 2-nd order space derivatives, those ones that have diffusive nature,

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p \mathbb{I}) = \rho \mathbf{g} \\ \partial_t (\rho e^t) + \nabla \cdot (\rho e^t \mathbf{u}) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \end{cases}$$

todo discuss the hyperbolic mathematical nature of Euler equations, and link to [Math:PDEs:Hyperbolic equations](#)

- Convective form...

$$\begin{cases} D_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \rho D_t \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{g} \\ \rho D_t e^t + \nabla \cdot (p \mathbf{u}) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \end{cases}$$

- Alternative sets of equations, if differential equations hold (no discontinuities: no shocks,...): internal energy instead of total energy, entropy,...
- internal energy, difference of total energy and kinetic energy (momentum equation $\cdot \mathbf{u}$):

$$\rho D_t e + p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

- entropy, from the 1-st principle of thermodynamics $de = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho$

$$\begin{aligned} \rho D_t s &= \frac{\rho}{T} \left[D_t e - \frac{p}{\rho^2} D_t \rho \right] = \\ &= \frac{\rho}{T} \left[-\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{p}{\rho^2} (-\rho \nabla \cdot \mathbf{u}) \right] = 0, \end{aligned}$$

i.e.

$$D_t s = 0$$

todo 1) entropy and shocks, 2) entropy and vorticity,...

23.1 Linearized Euler equations

Linearization around a reference state

...

23.1.1 Uniform and steady reference state

$\bar{\rho}$, $\bar{\mathbf{u}}$, \bar{s} . Time and space derivatives of the reference state are identically zero, thus Euler equations in convective form

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \rho \partial_t \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p &= \rho \mathbf{g} \\ \partial_t s + \mathbf{u} \cdot \nabla s &= 0\end{aligned}$$

are linearized as

$$\begin{aligned}\partial_t \rho' + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho' + \rho \nabla \cdot \mathbf{u}' &= 0 \\ \rho \partial_t \mathbf{u}' + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}' + \nabla p' &= \rho' \mathbf{g} \\ \partial_t s' + \mathbf{u} \cdot \nabla s' &= 0\end{aligned}$$

If the entropy is uniform everywhere (also at the boundary, so that no entropy enters from it), its perturbation is identically zero $s' = 0$, $s(\mathbf{r}, t) = \bar{s}$. Thus, for any thermodynamic variable written as function of density and entropy as the pair of independent variable, e.g. pressure $p(\rho, s)$, its differential is a function of the differential of the density only, being $ds = 0$

$$\begin{aligned}dp &= \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\rho=0} ds = \\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho = \\ &= c^2(\rho, s) d\rho.\end{aligned}$$

Now, for negligible volume forces $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, and writing $\nabla p = c^2 \nabla \rho$, mass and momentum linearized equations read

$$\begin{aligned}\partial_t \rho' + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho' + \bar{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u}' &= 0 \\ \bar{\rho} \partial_t \mathbf{u}' + \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u}' + c^2(\bar{\rho}, \bar{s}) \nabla \rho' &= \mathbf{0} . \\ D_t^{\bar{\mathbf{u}}} \rho' + \bar{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u}' &= 0 \\ \bar{\rho} D_t^{\bar{\mathbf{u}}} \mathbf{u}' + \bar{c}^2 \nabla \rho' &= \mathbf{0} .\end{aligned}$$

being $D_t^{\bar{\mathbf{u}}}$ the material time derivative with the reference velocity field,

$$D_t^{\bar{\mathbf{u}}} = \partial_t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla .$$

23.1.2 Wave equations

A wave equation for density perturbation $\rho'(\mathbf{r}, t)$ is obtained taking the difference of time derivative of the mass equation and the divergence of momentum equation,

$$\begin{aligned}D_{tt}^{\bar{\mathbf{u}}} \rho' + \bar{\rho} D_t^{\bar{\mathbf{u}}} \nabla \cdot \mathbf{u}' &= 0 \\ \bar{\rho} \nabla \cdot D_t^{\bar{\mathbf{u}}} \mathbf{u}' + \bar{c}^2 \nabla^2 \rho' &= 0 ,\end{aligned}$$

it follows

$$\frac{1}{\bar{c}^2} D_{tt}^{\bar{\mathbf{u}}} \rho' - \nabla^2 \rho' = 0 .$$

A wave equation for velocity perturbation $\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)$ is obtained taking the difference of time gradient of the mass equation and the time derivative of momentum equation,

$$\begin{aligned}\nabla D_t^{\bar{\mathbf{u}}} \rho' + \bar{\rho} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}') &= 0 \\ \bar{\rho} D_{tt}^{\bar{\mathbf{u}}} \mathbf{u}' + \bar{c}^2 D_t^{\bar{\mathbf{u}}} \nabla \rho' &= \mathbf{0} ,\end{aligned}$$

and using vector identity $\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{v}$, it follows

$$\frac{1}{c^2} D_{tt}^{\bar{u}} \mathbf{u}' - \nabla^2 \mathbf{u}' - \nabla \times \omega' = \mathbf{0},$$

being $\omega' = \nabla \times \mathbf{u}'$ the vorticity of the velocity perturbation.

For isentropic flows, differential of density perturbation $d\rho'$ can be related to differential of pressure perturbation, $d\rho' = \frac{1}{c^2} dp'$, so that pressure perturbation field is governed by a wave equation as well.

example-0

example-0 (*ch/compressible/pig*), ??

example-1

example-1 (*ch/compressible/prandtl-meyer*), ??

theorem-0

theorem-0 (*polimi/fluidmechanics-
ita/template/capitoli/08_aerodinamica/theorems*),
??

theorem-1

theorem-1 (*polimi/fluidmechanics-
ita/template/capitoli/08_aerodinamica/theorems*),
??

theorem-2

theorem-2 (*polimi/fluidmechanics-
ita/template/capitoli/08_aerodinamica/theorems*),
??